ELEMENTARY DYNAMICS

IN URDU,

WITH NUMEROUS EXAMPLES,

FOR THE USE

CHIEFLY OF THE HIGH PROFICIENCY STUDENTS

OF THE

PANJAB UNIVERSITY COLLEGE.

BY

S. B. MUKERJEE, M. A., B. L.,

PROFESSOR OF MATHEMATICS, GOVERNMENT COLLEGE, LAHORE.

Lahore:

PRINTED AT THE ALBERT PRESS.

1879.

PREFACE.

The aim of the author in compiling the present work is to co-operate with the Panjab University College in their laudable attempt to impart Western knowledge through the medium of the Vernacular. While recognizing from the beginning the necessity of publishing works in the Vernacular, that learned body has lately directed its attention more particularly to the translation and adaptation of Mathematical works, the want of which has hitherto been very seriously felt by the higher students on the Vernacular side, who have had no means to compete on equal terms with their English-knowing comrades in the field of Mathematics. The author had, with concern, watched this anomalous state of things during the five years of his stay in Lahore, and it is only when his expectation of seeing the work undertaken by abler hands proved as distant as ever, that he has ventured to supply the want in the form now before the public.

The author is aware that there are many inaccuracies, if not positive mistakes, both in the substance as well as in the arrangement of the present work. He can only adduce in excuse that he had no beaten track to follow. The greatest difficulty, for instance, was encountered in rendering exact the technical terms in Urdu. As very little help could be obtained under this head from former authors, either in Arabic or Urdu, the author was obliged in many places to adopt or coin words of his own; and although such adoption was made by the advice and approval of some of the most learned maulvis to whom the author had access, still he is himself not satisfied with many terms, and can only regard them as tentative and liable to be replaced by more suitable ones as time and experience suggest. The author claims the indulgence of the public to such mistakes on the plea that it is always easier to improve a subject than to start it, and he will thankfully receive any suggestions for improvement and try to correct himself in a future edition of the work, if called for.

A glossary of technical terms, with their English equivalents, is appended at the end for easy reference.

The author claims no originality in the preparation of the present work. He has freely availed himself of almost all the available sources of information on the subject, particularly the works of Todhunter, Goodwin, Wilson, Parkinson, Walton and others. Only those portions of the subject have been dealt with as have particular reference to the High Proficiency Examination of the Panjab University College. The arrangement of the chapters has been carefully made and each has been made to include the

whole the of subject-matter, properly belonging to it. Copious examples given at the end of chapters will furnish abundant exercise to the students. Everywhere, prominence has been given to the co-ordinate method of treatment, with a view to impress the student, at this early stage of his study, with the great importance of that method as a means of mathematical analysis. The author's experience as a mathematical teacher for many years justifies his expectation that this arrangement will be found convenient and useful.

The author has to record his thanks to his friends and pupils—Lala Aya Ram, B. A., Muhammad Husain, and Dilawar Ali Shah, for the valuable assistance they have given him in compiling the present work. Nor can he omit to acknowledge the great obligation he is under to Maulvi Ghulam Mustafa, of the Oriental College, Lahore, for the ready advice and help which he rendered whilst the work was passing through the press.

LAHORE GOVT. COLLEGE,
1st *November* 1879.

GLOSSARY OF TECHNICAL TERMS.

لغت الفاظ*

Acceleration	اسراع
Action and reaction	فعل انفعالي و فعل انفعالی
Abscissa of a point	نقطه کا محدد
Angle of Incidence	زاویه حدوثي
Angle of Reflexion	زاویه انعکاسي
Average or mean	اوسط
Axis	محور
Body	شئي
Body acted on by force	شئی معموله
Central or centripetal force ...	طاقت مرکزي
Centrifugal force	قوت هاربه
Circular measure	گول ناپ
Co-efficient of elasticity	علامت لاسطیقی
Co-efficient of friction	علامت تحکیک
Collision or Impact	مضاربه
Collision direct	مضاربه مستقیمه
Collision oblique	مضاربه غیر مستقیم
Constant in magnitude	مستقل
Compound motion	حرکت مرکب
Elasticity	لاسطیقی

Equator	خط استوا
Equilibrium	حالت سکون - اعتدال
Focus	نقطہ ماسکہ
Force	طاقت
Friction	تحکیک
Graduated	درجہ لگایا ہوا
Gravitation	کشش ثقل
Height of a point or plane ...	ارتفع
Horizontal line	خط افقي
Horizontal plane	سطح افقی
Inclined plane	سطح مائیل
Inclination of a plane	میلان
Latitude of a place	مقام کا عرض
Laws of motion	حرکت کے قوانین
Line of quickest descent	خط سریع النزول
Line of slowest descent	خط بطي النزول
Locus of a point	مقام النقاط
Mass	جسم
Matter	مادہ
Maximum	عظیم اطول
Momentum	قوت حرکت
Motion	حرکت
„ rotatory	حرکت مدوری

Motion sliding ... ... پھسلنا

Negative ... ... منفي

Number ... ... مقدار-عدد

Nth. unit ... ... ن وين اكائي

Oscillation ... ... جنبش

Ordinate of a point ... ... نقطہ كا معين

Parabola ... ... پيرابولا-قريب البيضوي

Pendulum ... ... شاقول

Pole of the earth ... ... قطب زمين

Positive ... ... مثبت

Pressure ... ... دباؤ

Principal axis of a curve ... محور عظيم

Proportional ... ... متناسب

" inversely ... ... متناسب علي العكس

Projection ... ... قذف-خذف

Projectile ... ... مقذوف-مخذوف

Progression ... ... سلسلہ

Pully ... ... پھركي-چركھي-گھرني

Rate ... ... حساب

Ratio ... ... نسبت

Range of a projectile ... ... وسعت مقذوف

Resistance ... ... مزحمت استقامت

Secant or chord ... ... وتر

Secant of an angle ... ... زاویہ کا متقاطع (قع)

Space ... ... فاصلہ

Terms of a series ... ... ارام سلسلہ

Time of flight of a projectile ... وقت تاخت

Unit ... ... اکائي

Uniform ... ... یکسان-مستوي

Uniform force ... ... طاقت مستقل

Variable ... ... غیر یکسان-متبدل

Velocity ... ... سرعت

" resultant or actual ... واقعی یا حاصل سرعت

" acquired or generated ... سرعت محصلہ

Velocity, resolved part of ... جزو منفصلہ

" angular ... ... سرعت الزاویہ

" initial ... ... سرعت ابتدائي

" relative ... ... سرعت منتسب

Vertical line ... خط سمت الراس یا خط راس

" plane ... ... سطح راس

Vertex ... ... راس چوٹي

Volume ... ... حجم

Weight ... ... وزن

" real ... ... وزن حقیقی یا اصلی

" apparent ... ... وزن ظاہري

اُس نقطہ سے ق فاصلہ پر واقع ہی مقذوف ہوا اور اُس دیوار سے ٹکر کہا کر پہر نقطہ قذف پر لوٹ آیا تو جسم کی سرعت قذف کیا تھی +

جواب $\sqrt{\frac{\text{ق ف}\,(1+\frac{1}{ح})}{\text{جب}^2 \text{ه}}}$

(۲۱) کوئی پورالاسطیق گیند کسی دو دیوارونکے مابین کسی نقطہ معین سے اور سرعت معین کے ساتھ مقذوف ہوا اور ہر دو دیوارون کے ساتھ ایک ایک دفعہ ٹکر کہا کر نقطہ قذف پر لوٹ آیا تو اُسکی سرعت قذف کیا تھی +

(۲۲) کسی انٹا کھیلنے کی میز پر جو کہ عین سطح افقی پر رکہی ہوئے ہے ایک بالکل لاسطیق گیند کسی نقطہ معین سے سرعت معین کے ساتھ متحرک کیا گیا اور چارون کنارون سے ایک ایک دفعہ ٹکر کہا کر نقطہ قذف پر لوٹ آیا تو ثابت کرو کہ گیند کی حرکت ایک ایسی متوازی الاضلاع شکل بناویگی کہ جسکے اضلاع میز کے وترون کے متوازی ہونگے +

تمت

(١٦) مثال بالا مین اجسام کے درمیان کیا نسبت ہونی چاہیے تاکہ مضاربہ کے بعد ہر ایک جسم کی سرعت زائل ہو جاے ⁕

جواب ج٢ = ج١ / ع ، ج٣ = ج٢ / ع وغیرہ

(١٧) ایک متحرک جسم ج ایک ساکن جسم جَ کے ساتھ زاویہ ہ بناکر مضاربہ مین آیا تو قبل از مضاربہ اور بعد از مضاربہ اُسکی سمتوں حرکت کے درمیان کا زاویہ معلوم کرو ⁕

جواب (١ + ع) / ٢ × جَ جب٢ ہ / (ج + ع جَ . جم ٢ ہ)

(١٨) کوئی جسم کسی دوسرے مساوی جسم ساکن کے ساتھ غیر مستقیم مضاربہ مین آیا اور دونوا اجسام پوری لالسطیق ہین اور قبل از مضاربہ اور بعد از مضاربہ اصلی جسم کی خطوط حرکت کا درمیانی زاویہ ٣٠° کا ہے تو مضاربہ کے بعد اُسکی سرعت کیا ہو گی - جواب سرعت سابق کا نصف

(١٩) کوئی جسم سطح افقی کے کسی نقطہ سے میلان ہ کے ساتھ سرعت گ سے مقذوف ہوا اور سطح افقی پر گرکر بار بار اُچھلتا ہوا چلا گیا جسم کی علامت لالسطیقی ع ہے تو سطح افقی مین اُسکی کل وسعت اور کل وسعت کا وقت تاخت اور نَ ویں دفعہ اُچھلنے مین اُسکا میلان دریافت کرو -

جواب گ٢ جب ٢ ہ / ق (١ - ع) اور ٢ گ جب ہ / ق (١ - ع) اور عⁿ مس ہ

(٢٠) کوئی جسم ہ میلان کے ساتھ کسی نقطہ معین سے ایک دیوار کی طرف جو کہ

ایک دوسرے کا چوگنا ہی اور انکی علامت لاسطیقی $\frac{1}{4}$ ہے ٭

(۱۳) ایک متحرک جسم $\bar{ج}$ ایک ساکن جسم $\bar{ج}$ کے ساتھ مضاربہ مین آیا انصدام کے بعد اُن دونون کی سرعتین مساوی ہوگئین تو علامت لاسطیقی دریافت کرو۔

$$\text{جواب}\ \frac{ج}{ج' - ج}$$

(۱۴) $ج_1$ اور $ج_2$ و $ج_3$ تین اجسام ہین اُن مین سے اوّل اور سیوم ایک ہی مادہ کا بنا ہوا ہے - ابتداء مین یہ تینون جسم ساکن تھے بعد ازان جسم $ج_1$ متحرک ہوکر $ج_2$ سے مضاربہ مین آیا اور $ج_2$ اُس مضاربہ سے متحرک ہوکر $ج_3$ سے مضاربہ مین آیا تو علامت لاسطیقی کیا ہونی چاہیئے تاکہ جسم $ج_3$ کی سرعت بعد از مضاربہ ویسی ہی ہو جیسی کہ اُسحالت مین ہوتی جبکہ $ج_2$ موجود نہوتا اور $ج_1$ ہی $ج_3$ کے ساتھ مضاربہ مین آتا۔

$$\text{جواب}\ \frac{ج_1\ ج'_2\ ج_2}{ج_2\,(ج_1 + ج_2)}$$

(۱۵) کُچھ اجسام سلسلہ ہندسیہ مین ہین جنکی نسبت مشترکہ $\bar{ہ}$ ہے ایک ہی خط مستقیم مین رکھے ہوئے ہین - جسم اول کسی سرعت کے ساتھ متحرک ہوکر دوسرے جسم سے مضاربہ مین آیا اور دوسرا اُس مضاربہ سے متحرک ہوکر تیسرے سے اور تیسرا چوتھے سے مضاربہ مین آیا علیٰ ہذا القیاس - ثابت کرو کہ بعد از مضاربہ اُن اجسام کی سرعتین ایک سلسلہ ہندسیہ مین ہونگی جنکی نسبت مشترکہ $\frac{1}{1+ہ}$ ہے ٭

کے بعد بڑے جسم والا گیند ساکن ہو جائیگا +

(۷) کوئی گیند ہ ارتفاع سے کسی ہموار افقی پر گرا اور بار بار اوپر اچھلنے کے بعد حالت سکون مین آگیا اگر گیند کی علامت لاسطیقی ع ہو تو اُسکے کل فاصلون طے شدہ کا مجموعہ دریافت کرو +

جواب $\frac{1 + ع^2}{1 - ع^2} \times$ ہ

(۸) کوئی گیند θ میلان کی سطح مائل کے ہ ارتفاع سے پھسلتی ہوئی اُسکے قاعدہ پر سطح افقی کے ساتھ مضاربہ مین آیا تو اُس سطح افقی پر گیند کی وسعت دریافت کرو + جواب ۲ ع ہ جا جب^2 θ

(۹) ایک غیر لاسطیقی جسم متحرک ہو کر ایک دوسرے ساکن جسم سے جو اُسکا دوچند ہے مضاربہ مین آیا تو ثابت کرو کہ مضاربہ کے بعد اول جسم کی سرعت ایک تہائی گھٹ جائے گی +

(۱۰) ۲ جسم جو ایک ہی سمت مین جداگانہ سرعتہائے ۷ اور ۵ سے متحرک تھے مضاربہ مین آئے بعد از مضاربہ اُنکی سرعتین جداگانہ ۵ اور ۶ ہین تو علامت لاسطیقی کی قیمت دریافت کرو + جواب $\frac{1}{2}$

(۱۱) دو جسم مخالف سمتون مین متحرک ہو کر مضاربہ مین آئے ثابت کرو کہ اگر عین قبل از مضاربہ اُنکے قوائے حرکت مساوی ہون تو مضاربہ کے بعد بھی قوائے حرکت مساوی رہینگے +

(۱۲) دو جسم مساوی سرعتون سے مخالف سمتون مین حرکت کرتے ہوئے مضاربہ مین آئے - بعد مضاربہ کے ایک جسم اپنی سرعت سابق سے لوٹ گیا اور دوسرا اپنی نصف سرعت سے اُسی سمت مین چلتا رہا تو ثابت کرو کہ اُن اجسام مین سے

مثالات باب پانزدہم

(۱) اگر مساوی جسم کے دو غیر لاسطیق گیندون مین مضاربہ واقع ہو تو ثابت کرو کہ وہ اپنی سرعتون کو آپسمین تبادلہ کر لینگے

(۲) کوئی ۵ پونڈ گیند فی سکنڈ ۱۴ فٹ کی سرعت سے چلتے ہوے کسی دوسرے ۳ پونڈ گیند سے جو ۱۰ فٹ فی سکنڈ چلتا ہی مضاربہ مین آیا - علامت لاسطیقی گیندون کی $\frac{1}{2}$ ہے تو مضاربہ کے بعد گیندون کی سرعتون کو معلوم کرو -

جواب ۱۱ و ۱۳

(۳) کوئی متحرک جسم ج کسی ساکن جسم جَ کے ساتھ مضاربہ مین آیا - تو علامت لاسطیقی کی قیمت کیا ہونی چاہیئے تاکہ مضاربہ کے بعد جسم جَ ساکن ہو جاوے

جواب $\frac{ج}{جَ}$

(۴) کوئی تین پونڈ کا گیند جو سرعت ۴ سے متحرک تھا ایک ۵ پونڈ گیند کے ساتھ جو اُسکے سمت مخالف مین سرعت ۶ سے متحرک تھا مضاربہ مین آیا - علامت لاسطیقی ی = $\frac{1}{2}$ تو بعد مضاربہ اُنکی سرعتونکو دریافت کرو +

جواب - ۶ $\frac{5}{8}$ اور ۴ $\frac{3}{8}$

(۵) کوئی گیند کسی سطح پر حد دق کی ساتھہ گرا اور ۶۰° زاویہ انعکاسی کے ساتھہ لوٹ گیا تو گیند کی علامت لاسطیقی دریافت کرو + جواب $\frac{1}{3}$

(۶) ۲ پورے لاسطیق گیند جنکے اجسام کی نسبت $\frac{1}{3}$ ہے اور جو مساوی سرعتون کے ساتھ مخالف سمتون مین متحرک ہین مضاربہ مین آئے تو ثابت کرو کہ مضاربہ

فرض کرو کہ عین قبل از مضاربہ سرعت گ کی سمت اُس سطح پر عمود سے زاویہ α بناتی ہے اور مضاربہ کے بعد گیند کی سرعت گَ ہے جسکی سمت اُس عمود کے ساتھ زاویہ θ بناتی ہے چونکہ مضاربہ کا عمل صرف اُس خط عمود ا کی سمت مین ہوگا اسلئے سطح کے متوازی گیند کے جزو منفصلہ گ جب α مین مضاربہ سے کچھ تغیر واقع نہوگا مگر عمود کی سمت مین جزو منفصلہ گ جم α پر مضاربہ کا اثر ویسا ہی ہوگا جیسا کہ مضاربہ مستقیم کے قاعدے مین بیان ہوا +

∴ گَ جب θ = گ جب α

اور گَ جم θ = -ع × گ جم α

∴ گَ^{2} = گ^2 (جب^2 α + ع^2 جم^2 α) .... (۱)

اور مس θ = $-\frac{1}{ع}$ مس α .... (۲)

ان مساوات سے گیند کی حرکت مضاربہ کے بعد معلوم ہوسکتی ہے

چونکہ یہان مس θ منفی ہے اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ زاویہ θ کی قیمت 90° سے زیادہ ہوگی جیسا کہ شکل مندرجہ مین دکھلایا گیا ہے +

تعریف - زاویہ گ ا ب اور گَ ا ب ان ہر دو زوایا کو زاویہ حدوثی اور زاویہ انعکاسی کہتے ہین +

اگر ع = ۱ ہو تو مساوات (۲) سے مس θ = - مس α

∴ θ = ($180^\circ - \alpha$) ∴ زاویہ گ ا ب = زاویہ گَ ا ب

گویا اس حالت مین زاویہ حدوثی و زاویہ انعکاسی باہم مساوی ہین

بالکل گول اور ہموار ہین اسلئے اگر ہم اُنکی سرعتون کو اُس خط مین اور اُس خط کے عمود مین منفصل کرین تو خط عمود مین اجزاء منفصلہ پر مضاربہ کا کچھ اثر نہین ہوگا یعنے مضاربہ کے بعد بھی اجزا اسے کی قیمت وہی رہیگی جو قبل از مضاربہ تھی مگر مرکزی خط مین سرعتہاے کے اجزاء مین مضاربہ سے ویسا ہی تغیر واقع ہوگا جیسا کہ مضاربہ مستقیم کے باب مین پیشتر بیان ہو چکا ہے پس مضاربہ کے بعد گیندون کی حرکت دریافت کرنے سے ہمین مساواتہاے ذیل حاصل ہونگی

$$گ \ جب \ \alpha = گ_{۱}' \ جب \ \theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

اور $$گ_{۲} \ جب \ \beta = گ_{۲}' \ جب \ \theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

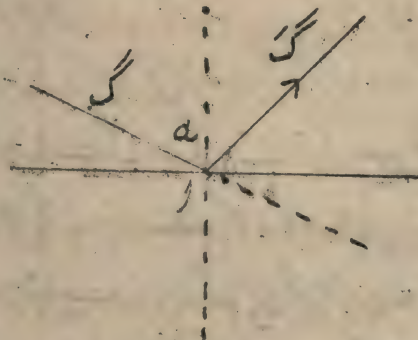
اور بموجب قاعدہ مضاربہ مستقیم کے

$$ج \left(گ_{۱} \ جم \ \alpha - گ_{۱}' \ جم \ \theta \right) = ج' \left(گ_{۲}' \ جم \ \phi - گ_{۲} \ جم \ \beta \right) \ldots\ldots (۳)$$

اور $$گ_{۲}' \ جم \ \phi - گ_{۱}' \ جم \ \theta = ع \left(گ_{۱} \ جم \ \alpha - گ_{۲} \ جم \ \beta \right) \ldots\ldots (۴)$$

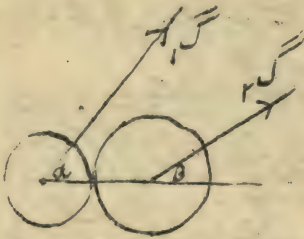
ان مساوات سے $گ_{۱}'$ اور $گ_{۲}'$ کی قیمت اور θ اور ϕ کی قیمت بھی دریافت ہوجائینگی

اس شکل کی کئی خاص حالتین بیان کرکے یہ باب تمام کیا جائیگا +

(۹۴) اگر کوئی گیند سرعت گ سے چلکر کسی ہموار سطح قائم سے مضاربہ غیر مستقیم مین آئے تو مضاربہ کے بعد اُسکی حرکت دریافت کرو +

مضاربہ اوّل گیند ساکن ہوجائیگا اور چونکہ اس حالت مین $گ'_2 = گ_1$ لہذا دوسرا گیند اول گیند کی سرعت کے ساتھ حرکت کرنے لگے گا +

(د) حالت بالا مین اگر $\frac{ج}{ج'}$ بہت کم ہو یعنے اگر ج کی قیمت بہ نسبت ج' کے بہت زیادہ ہو تو

$$گ'_1 = \frac{گ_1\,(ج - ج')}{ج + ج'} = \frac{گ_1\,(\frac{ج}{ج'} - 1)}{\frac{ج}{ج'} + 1}$$
$$= -\,گ_1$$

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ بعد از مضاربہ اوّل گیند اپنے سمت سابقہ کے مخالف لوٹ آویگا - اور اسکے لوٹنے کی سرعت اسکی سابق سرعت کی نسبت کسیقدر کم ہوگا اگر کوئی گیند کسی دیوار سے یا زمین پر آکر لگے تو اس قسم کی حرکت وقوع مین آتی ہے +

(۱۴۸) دو گیند مضاربہ غیر مستقیم مین آئے - مضاربہ کے بعد انکی حرکت دریافت کرو +

فرض کرو کہ عین قبل از مضاربہ گیندہاے مذکورہ جداگانہ سرعتہاے $گ_1$ اور $گ_2$ سے متحرک ہین جنکی سمتین گیندون کے مرکزون کے وصل کنندہ خط سے جداگانہ α اور β زاویہ بناتے ہین اور مضاربہ کے بعد انکی سرعتہاے $گ'_1$ اور $گ'_2$ ہین جنکی سمتین خط مذکورہ سے زوایا θ اور ϕ بناتی ہین
ظاہر ہے کہ مضاربہ کا عمل مرکزون کے وصل کنندہ خط مین ہی ہوگا کیونکہ گیند

(۱۴۷) مساواتوں مذکورہ بالا سے کئی خاص خاص نیچے نکل سکتے ہین ٭

(ا) فرض کرو کہ دونو گیند پورے پورے لاسطیق ہین۔ تو گویا ء = ۱

$$\therefore \text{گ}'_{۱} = \frac{\text{گ}_{۱}(\text{ج} - \text{ج}') + ۲\,\text{گ}_{۲}\,\text{ج}'}{\text{ج} + \text{ج}'}$$

$$\text{اور}\ \text{گ}'_{۲} = \frac{۲\,\text{گ}_{۱}\,\text{ج} - \text{گ}_{۲}(\text{ج} - \text{ج}')}{\text{ج} + \text{ج}'}$$

(ب) فرض کرو کہ دونو گیند بالکل غیر لاسطیق ہین تو گویا ء = ۰

$$\therefore \text{گ}'_{۱} = \frac{\text{گ}_{۱}\,\text{ج} + \text{گ}_{۲}\,\text{ج}'}{\text{ج} + \text{ج}'} = \text{گ}'_{۲}$$

یعنی اس حالت مین دونو گیند بعد از مضاربہ متحد ہو کر حرکت کرینگے

(ج) اگر گ۲ = ۰ یعنے اگر ایک متحرک گیند دوسرے ساکن گیند سے مضاربہ کرے تو

$$\text{گ}'_{۱} = \frac{\text{گ}_{۱}(\text{ج} - \text{ء}\,\text{ج}')}{\text{ج} + \text{ج}'}$$

$$\text{و}\ \text{گ}'_{۲} = \frac{\text{گ}_{۱}\,\text{ج}\,(۱ + \text{ء})}{\text{ج} + \text{ج}'}$$

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ ساکن گیند بباعث مضاربہ کے حرکت مین آویگا اور اول جسم بعد از مضاربہ اپنے سمت سابقہ مین یا سمت مخالف مین حرکت کریگا بشرطیکہ $\frac{\text{ج}}{\text{ج}'}$ بڑا یا چھوٹا ہو ء سے اگر $\frac{\text{ج}}{\text{ج}'}$ = ء ہو تو بعد از

کہ اُس خط کے باہر چلے جائین - فرض کرو کہ بعد از مضاربہ اُنکی سرعت جداگانہ گَ_1 و گَ_2 ہین +

ظاہر ہوگا کہ اول جسم کی قوت حرکت بباعث مضاربہ بقدر $(\text{گ}_1 - \text{گَ}_1)\,\text{ج}$ کے کم ہو جائیگی اور دوسرے جسم کی قوت حرکت اُسی سبب سے بقدر $(\text{گَ}_2 - \text{گ}_2)\,\text{جَ}$ کے بڑہ جائیگی - (اسلیئے بموجب حصہ ۱۴۱)

$$(\text{گ}_1 - \text{گَ}_1)\,\text{ج} = (\text{گَ}_2 - \text{گ}_2)\,\text{جَ} \quad \ldots\ldots (1)$$

اور نیز پیشتر از مضاربہ اول جسم کی سرعت منتسب بلحاظ دوسرے جسم کے برابر تہی $(\text{گ}_1 - \text{گ}_2)$ کے اور بعد از مضاربہ دوسرے جسم کی سرعت منتسب بلحاظ اول جسم کے برابر ہے $(\text{گَ}_2 - \text{گَ}_1)$ اسلیئے اگر ء علامت لاسطیقی کو تعبیر کرے تو بموجب تجربہ نیوٹن صاحب کے $\text{ء}\,(\text{گ}_1 - \text{گ}_2) = (\text{گَ}_2 - \text{گَ}_1) \quad \ldots (2)$

مساوات نمبر (۱) و (۲) سے گَ_1 و گَ_2 کی قیمتین دریافت ہو سکتی ہین یعنی

$$\text{گَ}_1 = \frac{\text{گ}_1\,\text{ج} + \text{گ}_2\,\text{جَ} - \text{ء}\,\text{جَ}\,(\text{گ}_1 - \text{گ}_2)}{\text{ج} + \text{جَ}}$$

$$\text{اور}\ \text{گَ}_2 = \frac{\text{گ}_1\,\text{ج} + \text{گ}_2\,\text{جَ} + \text{ء}\,\text{ج}\,(\text{گ}_1 - \text{گ}_2)}{\text{ج} + \text{جَ}}$$

ہمنے اوپر فرض کیا ہے کہ سرعت گ_1 و گ_2 ایک ہی سمت ہین اور نیز اُسی سمت کو مثبت بہی فرض کیا ہے - پس اگر مساوات مذکورہ بالا سے گَ_1 یا گَ_2 کی قیمت مقدار منفی نکلے تو اس سے یہہ سمجھ لینا چاہیئے کہ اُسکی سمت سمت مذکورہ کے مخالف ہے +

صفر سے زیادہ اور عدد آ سے کم ہوتی ہے - مگر بغرض تحقیق حکماء پوری لااسطیق اجسام کے لئے اسمقدار کی قیمت کو عدد آ اور بالکل غیر لااسطیق اجسام کے لئے قیمت صفر فرض کر لیتے ہین +

مگر یہ صرف قیاسی ہے کیونکہ دنیا مین کوئی جسم ایسا نہین پایا جاتا جسمین لااسطیقی پوری پوری موجود ہو یا بالکل نہ موجود ہو +

(۱۴۵) یہ بات قابل یاد رکھنے کے ہے کہ علامت لااسطیقی کوئی بالکل مستقل مقدار نہین ہے بلکہ تجربہ سے معلوم ہوا ہے کہ جب اجسام کی سرعت بوقت مضاربہ بہت زیادہ ہوتی ہے تو اس علامت کی قیمت کچھ گھٹتی جاتی ہے - مگر جب سرعت مضاربہ بہت ہی بڑی نہو تو اس علامت کو مقدار مستقل فرض کرنے سے کوئی غلطی واقع نہو گی +

گیندون کا مضاربہ دو قسم کا ہوتا ہے - اگر بوقت مضاربہ دونو گیندون کے مرکز ایک ہی خط مین حرکت کرتے ہون تو اس مضاربہ کو مضاربہ مستقیم کہتے ہین - اور جب وے ایک ہی خط مین حرکت نکرین تو اسکو مضاربہ غیر مستقیم کہتے ہین +

(۱۴۶) دو گیند جنکے اجسام ج و جَ ہین اور ایک ہی خط مین متحرک ہے ایکدوسری سے ٹکر کھاتے ہین تو بعد از مضاربہ انکی حرکت دریافت کرو +

فرض کرو کہ گیند ایک ہی سمت مین چل رہے ہین اور بوقت مضاربہ انکی سرعت اس سمت مین جداگانہ گ د گَ تھی جہان گ ہے گَ سے بڑا ہے +

چونکہ اجسام بوقت مضاربہ ایک ہی خط مستقیم مین حرکت کر رہے تھے تو بعد از مضاربہ بھی وے اسی خط مین حرکت کرتے رہینگے کیونکہ کوئی دلیل نہین ہے

اپنے سابقہ حجم کی حاصل کرنے کی کوشش مین ایک دوسرے کے برخلاف عمل کرینگے جسکے سببسے وہ فوراً ایکدوسرے سے علٰحدہ ہوکر مختلف سرعتون کے ساتھ حرکت کرنے لگین گے +

(۱۴۴) واضح ہو کہ جب تک دو اجسام ایکدوسرے سے مس کرتے رہتے ہین تب تک ہر لحظہ مین اُنکے عمل باہمی مقدار مین برابر اور سمت مین مخالف ہوتے ہین (بموجب قانون سوم حرکت) نیوٹن صاحب نے بہت سے تجربہ کے بعد دریافت کیا ہے کہ مضاربہ کے پیشتر اول جسم کی سرعت منتسب جسکے ساتھ وہ دوسرے جسم کے قریب ہوتا جاتا ہے اُس سرعت متناسب سے جسکے ساتھ وہی جسم مضاربہ کی بعد دوسرے جسم سے بعید ہوتا جاتا ہے ہمیشہ ایک نسبت مستقل رکھتی ہے۔

مثلاً اگر مضاربہ کے پیشتر اول جسم کی سرعت منتسب بلحاظ دوسرے جسم کے م ہو تو گویا اس سرعت کے ساتھ یہ جسم دوسرے کے قریب آرہا ہے اور اگر مضاربہ کی بعد دوسرے جسم کی سرعت منتسب بلحاظ اول جسم کے مَ ہو تو گویا اس سرعت کے ساتھ اول جسم دوسرے سے بعید ہوتا جاتا ہے کیونکہ اس حالت مین اول جسم کی سرعت منتسب بلحاظ دوسرے جسم کے -مَ ہوگی (دیکھو حد ۶۶) اور یہ کہنا کہ ایک شے سرعت (-مَ) کے ساتھ دوسرے کے قریب آرہی ہے یا یہ کہنا کہ وہی شے سرعت (+مَ) کے ساتھ دوسرے سے بعید ہوتی جاتی ہے ایک ہی بات ہے پس نیوٹن صاحب کے تجربہ سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ مَ ∝ م یا مَ = ء م جہانکہ ء ایک مقدار مستقل ہے جسکی قیمت اجسام المضاربہ کی لاسطیقی پر منحصر ہے۔ اس مقدار کو ہم علامت لاسطیقی کہینگے۔ تجربہ کثیر سے معلوم ہوا ہے کہ اس علامت کی قیمت تمام اجسام کے لئے

ہین وہ بھی مساوی ہین +

(۲۴۱) دنیا کے کُل اجسام کسیقدر لائق یا مائل ہین یعنے اُن سب کے حجم طاقتون کے عمل سے دبائے جا سکتے ہین - اور جب وہ طاقتین ہٹائی جاوین تو اجسام اپنے سابق حجم حاصل کرنے کی کوشش کرتے ہین - اس کوشش مین بعضے اجسام زیادہ کامیاب ہوتے ہین اور بعضے کم دباؤ کے بعد اجسام کی اپنے حجم سابقہ حاصل کرنیکی قابلیت کو لاسٹیکتی کہتے ہین - یہ لاسٹیکتی کسی جسم مین پورے پورے نہین پائے جاتے - مگر کئی مادے مثلاً ہاتھی دانت وغیرہ ایسے ہین کہ جن مین قریباً پوری لاسٹیکتی موجود ہے - اسی لاسٹیکتی کے باعث سے مضاربہ کے بعد اجسام کی حرکت مین تبدیلی واقع ہوتی ہے

بغرض سہولیت ہم فرض کرینگے کہ اجسام مضاربہ ایک ہی قسم کے مادہ کے بنے ہوئے ہین اور گیند کی طرح گول ہین +

(۲۴۲) فرض کرو کہ دو گیند جو ایک ہی خط مین متحرک تھے حالت مضاربہ مین آئے اگرچہ اُنکا عرصہ مضاربہ نہایت قلیل ہوگا حتیٰ کہ ایک سیکنڈ کے سوین حصّہ سے بھی کم مگر طاقت مضاربہ اسقدر زیادہ ہوتی ہے کہ اس عرصہ قلیل مین بھی گیندونکی حرکت مین بہت تبدیلی پیدا کرتی ہے - فرض کرو کہ عرصہ مضاربہ دو حصّون مین منقسم کیا گیا حصّہ اول مین اجسام کے جتنے اجزا ایکدوسرے سے ٹکر کھاتے ہین دب جاتے ہین - اور رفتہ رفتہ اُنکا باہمی دباؤ بڑھتا جاتا ہے اور اس حصّہ کے انجام مین دونون اجسام ایک لحظہ کے واسطے گویا متحد ہو کر ایک ہی سرعت کے ساتھ حرکت کرنے لگینگے دوسرے حصّہ وقت مین دونو اجسام بباعث لاسٹیکتی کے

باب پندرھوان

اجسام کے مضاربہ کے بیان مین

(۱۴۰) اس مقام تک ہمنے صرف مستقل طاقتون کے عمل کا ذکر کیا ہے۔ اب ہم اُس تبدیلی کا ذکر کرینگے جو کہ دو متحرک اجسام کے ضرب باہمی سے اُنکی حرکت مین پیدا ہوتی ہے۔ جسطرح کہ ہمنے اگلے بابون مین فرض کیا تھا اُسیطرح ہم اُس باب مین بہے فرض کرینگے کہ اجسام مین کوئی حرکت مدوری واقع نہین ہوگی اور وے خلا مین حرکت کرتے ہین ✣

(۱۴۱) یہہ بات عیان ہے کہ جب دو جسم ایکدوسرے کے ساتھہ ٹکر کہاتی ہین تو ان دونونکی حرکت مین تبدیلی واقع ہوتی ہے۔ یہہ تبدیلی ضرور کسی طاقت کے عمل سے پیدا ہوئی ہوگی۔ مگر کوئی شے ازخود کسی طاقت کی بانی نہین ہے جس قوۃ حرکت کے ساتھہ ایک جسم ضرب کے لحظہ مین حرکت کر رہا ہو اُسی قوۃ حرکت کا کوئی جزو تبدیلی مذکورہ بالا کو پیدا کرتا ہے یعنے جتنے قوۃ حرکت بباعث ضرب ایک جسم کی کم ہو جاتی ہے اُتنی ہی دوسرے جسم کی قوۃ حرکت بڑھ جاتی ہے۔ اسلئے ضرب کے پیشتر جو مجموعہ دونو متحرک جسمونکی قوایا حرکت کا ہے بعد ضرب کے بھی اُن قوتونکا مجموعہ وہی رہتا ہے۔ یہہ نتیجہ حرکت کے تیسرے قانون سے بھی ظاہر ہے کیونکہ ضرب کے لحظہ مین دونو جسمونکے عمل باہمی مقدار مین مساوی اور سمت مین ایکدوسرے کے مخالف ہوتے ہین۔ اسلئے اُنکی عمل باہمی سے جو تبدیلین دونو جسمونکی قوۃ حرکت مین پیدا ہوتی ہین

ب کے وسعت کے نقطۂ تنصیف سے ایک سطح مائل یہ میلان کی گذرتی ہے تو دریافت کرو کہ مقذوف کو ابتدا سے سطح مائل تک پہنچنے مین کتنا وقت لگیگا +

جواب $\frac{\text{گ جیب ط}}{\text{ق}} \times \sqrt{\text{۲}}$

(۲۰) د فٹ ارتفاع کے ایک مینار کی چوٹی سے ایک جسم ایسی سرعت سے مقذوف ہوا کہ اگر وہ مینار کی ن گنا اونچائی سے نیچے گرتا تو اسکی سرعت محصلہ زمین پر پہنچنے کے وقت برابر سرعت قذف کی ہوتی تو دریافت کرو کہ مقذوف کی وسعت اعظم سطح زمین پر کیا ہوگی - اور نیز یہہ بھی ثابت کرو کہ وسعت اعظم حاصل کرنے کے لئے جسم کو ایسے زاویہ میلان سے مقذوف ہونا چاہئے کہ جسکا مس ۔ ما $\sqrt{\frac{\text{ن}}{\text{ن+۱}}}$ کے ہو

جواب ۲ د $\sqrt{\text{ن + ن۲}}$

(۱۵) کوئی ذرہ میلان α سے متقذوف ہوا تو دریافت کرو کہ کتنے وقت کے انجام میں اُسکی سمت حرکت β میلان کی ایک سطح مائل کے ساتھ زاویہ قائمہ بناویگی +

جواب $\frac{1}{\text{ق}} \times (\text{مس}\,\alpha \pm \text{جم}\,\beta)$

(۱۶) ایک جسم جو سرعت گ کے ساتھ متقذوف ہوا β میلان کی ایک سطح مائل پر جو کہ نقطہ حذف میں سے گذرتی ہے زاویہ قائمہ بنا کر گرا تو ثابت کرو کہ سطح زمین سے اُس نقطہ کی بلندی جسپر کہ متقذوف آکر گرا برابر $\frac{2\text{گ}^2}{\text{ق}} \times \frac{\text{جب}^2\beta}{1+3\,\text{جب}^2\beta}$ کے ہے

(۱۷) ایک توپ کا گولا سرعت گ سے α میلان کے ساتھ چلا۔ اور بوقت قذف توپ اپنی نالی میں سے گذرتی ہوئی سطح راس کے ساتھ زاویہ β بنا کر سرعت گَ سے متحرک تھی تو گولے کی وسعت سطح زمین پر دریافت کرو +

جواب $\frac{2\text{گ}\,\text{جب}\,\alpha}{\text{ق}}\sqrt{\text{گَ}^2+\text{گ}^2\,\text{جم}^2\alpha+2\,\text{گ}\,\text{گَ}\,\text{جم}\,\alpha\times\text{جم}\,\beta}$

(۱۸) ایک پتھر اسطرح سے متقذوف ہوا کہ ایک درخت کی چوٹی پر ایک چڑیا کے لگنے کے بعد اتنا اونچا جا سکے کہ اُسکی کل اونچائی سطح افقی سے برابر دوچند اونچائی درخت کے ہو۔ بوقت قذف چڑیا سطح افقی کے متوازی اُوڑ گئی۔ تو ثابت کرو کہ اگر محذوف کی سرعت کا جز منفصلہ متوازی سطح مستوی کی چڑیا کی سرعت کے ساتھ ایسی نسبت رکھے جیسا کہ $1+\sqrt{2} : 2$ تو پھر چڑیا کو ضرور لگے گا +

(۱۹) کوئی جسم میلان α کے ساتھ سرعت گ سے متقذوف ہوا۔ سطح افقی پر متقذوف

(۹) دو جسم ایک ہی لحظہ مین کسی نقطہ سے مختلف میلانون پر مختلف سرعتون کے ساتھ مقذوف ہوئی تو کسی وقت معین کے بعد اُنکے درمیان فاصلہ کیا ہوگا +

(۱۰) کسی جہاز مین جسکی سرعت حرکت گ ہے ایک توپ سے میلان α کے ساتھ ایک گولہ سرعت گَ کے ساتھ چلایا گیا جہاز اور گولا ایک ہی سطح راس مین حرکت کرتے ہین - تو گولہ کی وسعت دریافت کرو +

جواب = (۲ گَ جب α / ق) × (گ + گَ جم α)

(۱۱) ثابت کرو کہ کسی °۳۰ کی سطح مائل پر مقذوف کی وسعت سطح افقی پر کی وسعت کے ۲/۳ کے برابر ہے +

(۱۲) کوئی جسم جو کہ میلان α کے ساتھ سرعت گ سے مقذوف ہوا ایک دیوار کی چوٹی کو مس کر کے چلا گیا - اُس دیوار کی ارتفاع کا زاویہ مقابل نقطہ قذف کے β ہے تو دریافت کرو کہ مقذوف کو ابتدا سے دیوار کی چوٹی تک پہنچنے مین کتنا وقت صرف ہوا ہوگا -

جواب = ۲ گ جب ($\alpha - \beta$) / ق جم β

(۱۳) کسی مینار کی چوٹی سے ایک پتھر معین میلان سے مقذوف ہوا تو سرعت قذف کیا ہونی چاہیئے تاکہ سطح افقی کے ایک نقطہ معین پر آکر گرے +

(۱۴) دو پتھر ایک ہی لحظہ مین ایک سطح راس مین سرعتون گ و گَ کے ساتھ اور جدا گانہ میلان α و β سے مقذوف ہوئے تو ثابت کرو کہ (گ × گَ × جب($\beta - \alpha$)) / (ق (گ جم β - گَ جم α)) وقت کے انجام مین اُنکی سمت حرکت ایک دوسرے کے متوازی ہوگی +

کی $\frac{1}{5}$ تہی تو سطح مائل کے نقطہ میل سے اُس نقطہ کا فاصلہ جہان وہ سطح افقی اکو آکر قطع کرتا ہے دریافت کرو ❖

جواب $\frac{۱۲\text{گ}^۲}{۲۵\text{ق}}$ فٹ

(۵) ایک سطح مائل کا میلان ـلہ ہے تو کوئی ذرہ اُس سطح مین کتنے میلان پر متقذوف ہو تا کہ اُس سطح پر گرنے کے وقت اُسکی سمت حرکت سطح سے زاویہ قائمہ بناوے ❖

جواب مس‌‌ا ($\frac{1}{2}$ جم ـلہ)

(۶) سطح راس مین ایک مثلث واقع ہے جسکا قاعدہ خط افقی مین ہے اور قاعدہ کے زاوئے ـب و ـد ہین اُسکے قاعدہ کے ایک سرے سے کوئی ذرہ اسطرح سے متقذوف ہو کہ وہ عین اُس مثلث کے نقطہ راس کو مس کر کے قاعدہ کے دوسرے سرے پر جا گرا - اگر میلان تقذف θ ہو تو ثابت کرو کہ

مس θ = مس ـب × مس ـد

(۷) کوئی ذرہ سرعت ۳ ق کے ساتھہ ۶۰° کے میلان سے متقذوف ہوا تو اُسکی وسعت سطح افقی پر دریافت کرو ❖

جواب $\frac{۹\text{ق}}{۲}$

(۸) اگر کسی متقذوف کے نقطہ ارتفاع اعظم پر اُسکی سرعت کی مقدار بدل دیجاے مگر سمت سرعت بدستور رہے تو دریافت کرو کہ آیا اُسکا وقت تاخت مین فرق واقع ہوگا یا نہین ❖

جواب .... نہین

تو بموجب مساوات حد ۱۳۴ اکے نقطہ ل کے محددین م ب و م ل دریافت ہوسکتی ہین، مگر یاد رکھنا چاہیئے کہ اسحالت مین ل کا معین ل م مقدار منفی ہوگا کیونکہ وہ محور ب م کے نیچے واقع ہوتا ہے +

جب کوئی جسم کسی مینار وغیرہ کی چوٹی سے سمت مائل مین مقذوف ہو تو اُسکی حرکت کے دریافت کرنے کے لئے بحث مذکورہ بالا عمل مین آویگی +

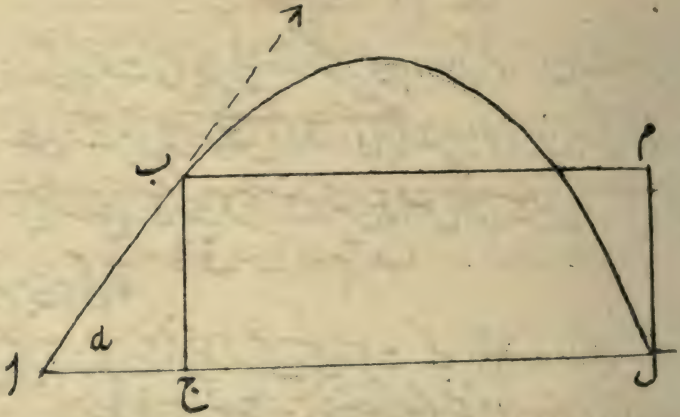
تمثیلات باب چہاردہم

(۱) کسی ذرہ کی سرعت کی اجزاء منفصلہ متوازی دو معین محورون کے اسراع یکسان سے بدلتے ہین تو ثابت کرو کہ ذرہ کی حرکت پیرابولا مین ہوگی مگر جب اجزاء منفصلہ اُس اسراع کے ہمیشہ متناسب رہین تو اُس صورت مین ذرہ کی حرکت خط مستقیم مین ہوگی +

(۲) کسی ایک مقام سے دو اجسام ایک ہی سرعت کے ساتھ مقذوف ہوئے اور اُنکی زوایا میلان کا مجموعہ برابر ۹۰° کے ہے تو ثابت کرو کہ اُن دونون کی وسعت سطح افقی پر ایک ہی ہوگی +

(۳) اگر ایک ہی لحظہ مین ایک ہی مقام سے اور ایک ہی سرعت کے ساتھ کئی ایک اجسام مقذوف ہون تو وے سب اپنی حرکت کے ہر لحظہ مین ایک کرہ کی سطح پر رہینگے +

(۴) ایک ۴۵° کے سطح مائل کے پاؤن سے سرعت گ کے ساتھ کوئی ذرہ اوپر مقذوف ہوا جب ذرہ سطح کے نقطہ راس پر پہونچا تو اُسجگہہ اُسکی سرعت قدف

حرکت کرتا (دیکھو حد ۹۵) اور اگر دونو مقذوف صرف اسراع کشش ثقل ق سے نیچے گرتے تو اُنکا مرکز ثقل بھی اسراع ق سے ایک خط مستقیم مین نیچے گرتا - پس ہم فرض کر سکتے ہین کہ مقذوفون کے مرکز ثقل کی دو حرکتین ایک ہی وقت مین موجود ہین اول سرعت یکسان جو بہ سبب سرعتہاے قذف کے پیدا ہوتی ہے اور دوسرا اسراع یکسان ق جو بہ سبب کشش ثقل کے پیدا ہوتا ہے اسلئے حد ۱۳۱ کی مانند اسجگہہ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ مرکز ثقل کی حرکت پیرابولا مین ہوگی ٭

(۱۴۹) جب کوئی ذرہ سطح مایل پر ایسی سرعت معین سے مقذوف ہو کہ سطح مایل کے راس تک پہنچنے کے بعد بھی حرکت کرتا رہے تو اُسکی حرکت بعد ازین پیرابولا مین ہوگی شکل مذکورہ بالا سے ذرہ کی حرکت کا حال بخوبی واضح ہو جائیگا ٭

سطح مایل کے راس تک پہنچنے مین ذرہ کی سرعت محصلہ ہوگی اسکو ذرہ کی حرکت مابعد کی لئے سرعت قذف سمجھنی چاہیئے ٭

اگر ذرہ اُس سطح افقی کو جو نقطہ ا مین سے گذرتی ہے مقام ل پر آکر قطع کرے

فرض کرو کہ دو اجسام جداگانہ سرعت گ و گَ کے ساتھ مقذوف ہر کی کسی وقت ص کے

انجام مین نقاط بَ و بَ پر پہونچین

اور وقت صَ کے انجام مین نقاط جَ و جَ پر پہونچین

تو بموجب قانون دویم حرکت کی ہم فرض کر سکتے ہین کہ مقذوف اول نے ص وقت مین سرعت گ کے ساتھ سمت قذف مین ا م فاصلہ طے کیا اور بہ سبب کشش ثقل کے فاصلہ م ب نیچے گرا اور اسطرح مقذوف دویم کی بابت بھی فرض ہو سکتا ہے

$$\frac{ا م}{ا ن} = \frac{گ \times ص}{گ \times صَ} = \frac{ص}{صَ}$$

اور

$$\frac{ا مَ}{ا نَ} = \frac{گَ \times ص}{گَ \times صَ} = \frac{ص}{صَ}$$

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ م مَ متوازی ن نَ کے ہے

اور نیز م ب = $\frac{1}{2}$ ق ص^2 = مَ بَ

اسلئے ب بَ متوازی م مَ کے ہے

اسیطرح ثابت ہو سکتا ہے کہ ج جَ متوازی ن نَ کے ہے

اسلئے ب بَ متوازی ج جَ کے ہے

یہی بحث ہر لحظہ کے لئے درست ہوگی۔ پس دعوے ثابت ہوگیا

(۱۳۸) دو مقذوفون کے مرکز ثقل کی حرکت بھی پیرابولا مین ہوتی ہے

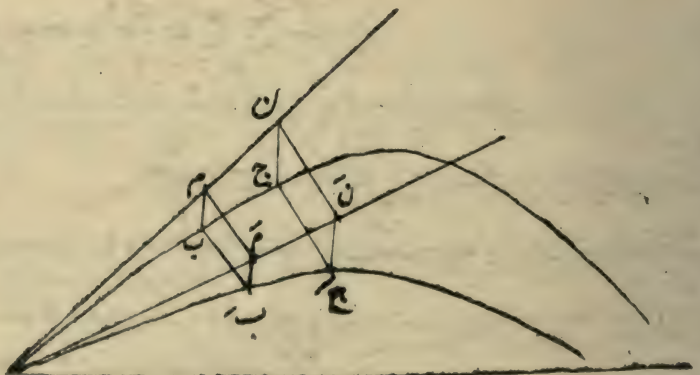
یہ دعوے عدد ۹۴ و ۹۵ و ۹۶ سے ثابت ہو سکتا ہے کیونکہ حرکت کے دوسرے قانون سے ظاہر ہے کہ اگر دونون مقذوف صرف اپنی سرعتہاے ابتدائی کے ساتھ حرکت کرتے تو انکا مرکز ثقل ایک خط مستقیم مین یکسان سرعت کے ساتھ

$$= \frac{\text{گ}^{2}}{\text{ق جم}^{2}\,\text{ھ}} \times \left\{ \text{جب}\,(2\,\text{ہ} - \text{ھ}) - \text{جب}\,\text{ھ} \right\}$$

اسلئے اگر $2\,\text{ہ} - \text{ھ} = 90^\circ$ یعنی اگر $\text{ہ} = \frac{\text{ھ} + 90^\circ}{2}$ ہو

تو اس کی قیمت اعظم ہوگی اور اس وسعت اعظم کی قیمت اُس حالت مین

$$= \frac{\text{گ}^{2}\,(1 - \text{جب}\,\text{ھ})}{\text{ق جم}^{2}\,\text{ھ}} = \frac{\text{گ}^{2}}{\text{ق}\,(1 + \text{جب}\,\text{ھ})}$$

(۱۳۷) جب دو اجسام ایک ہی مقام سے مختلف سرعتون کے ساتھ مختلف سمتون مایل مین مقذوف ہون تو اُنکا خط وصل کنندہ ہمیشہ اپنے متوازی رہیگا ۔

کے متوازی منفصل کیا جاوے تو مانند بحث دفعہ ۱۳۳ کے ظاہر ہوگا کہ

ا م = گ جم ($\alpha - \beta$) ص − $\frac{1}{2}$ ق جب β ص^2 ...... (۱)

اور ب م = گ جب ($\alpha - \beta$) ص − $\frac{1}{2}$ ق جم β ص^2 ...... (۲)

پس اگر مقذوف کو نقطہ س پر پہنچنے میں وقت ت صرف ہوا ہو تو

ا س = گ جم ($\alpha - \beta$) ت − $\frac{1}{2}$ ق جب β × ت^2

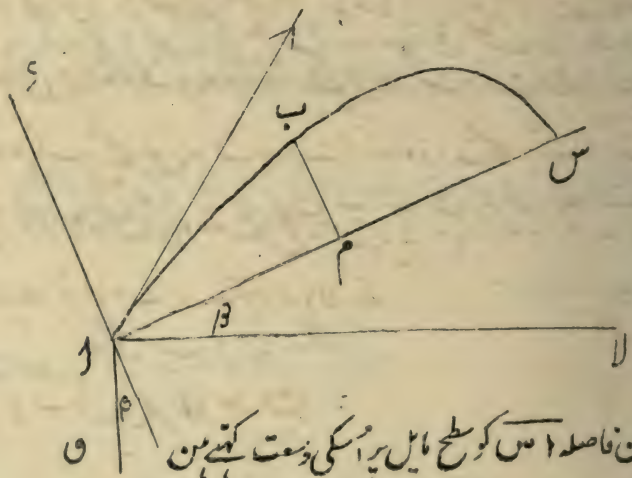
اور ۰ = گ جب ($\alpha - \beta$) ت − $\frac{1}{2}$ ق جم β × ت^2

∴ ت = $\frac{\text{۲ گ جب } (\alpha - \beta)}{\text{ق جم } \beta}$

اور ا س = $\frac{\text{۲ گ جب } (\alpha - \beta) \text{ جم } \alpha}{\text{ق جم}^2 \beta}$

(۱۳۶) چونکہ ا س = $\frac{\text{۲ گ}^2 \text{ جب } (\alpha - \beta) \text{ جم } \alpha}{\text{ق جم}^2 \beta}$

واضح ہو کہ جب مقذوف نقطہ ا پر تھا یعنی لحظ قذف مین ف برابر صفر کے تھی کیونکہ اُس
مقام پر بھی آل کی قیمت برابر صفر کے ہے ۔
مساوات بالا مین د کی قیمت سے ظاہر ہوتا ہے کہ اگر مقذوف کی سرعت قذف
مستقیم رہے اور میلان قذف مختلف لیا جاوے تو اس میلان کو ۴۵° لینے سے
د کی قیمت اعظم ہوگی +

(۱۳۵) فرض کرو کہ اس ایک سطح مایل ہے جو سطح افقی سے زاویہ β بناتی ہو
اور کوئی مقذوف اس سطح کے مقام س پر آکر گرا

اسحالت مین فاصلہ اس کو سطح مایل پر اُسکی وسعت کہتے ہین
یہ وسعت اور اسحالت کا وقت تاخت حسب ذیل دریافت ہوتے ہین +
نقطہ آ سے سطح مائل پر عمود اء نکالو اور اس اور اد کو محور مانلو اور فرض کرو کہ کسی
وقت ص کے انجام مین مقذوف نقطہ ب پر پہنچا ہے اور ام اور ب م اُس نقطہ
کی محددین ہین تو اگر مقذوف کی سرعت گ اور اسراع کشش ثقل ق وغیرہ ون

$$\text{و گ جب}\,\phi = \text{گ جب ہ} - \text{ق ص}$$

$$\therefore\ \text{گ}_1^2 = \text{گ}^2 - \text{۲ ق ص گ جب ہ} + \text{ق}^2\text{ص}^2 \ \ldots\ldots\ (۱)$$

$$\text{د س}\,\phi = \frac{\text{گ جب ہ} - \text{ق ص}}{\text{گ جم ہ}} \ \ldots\ldots\ (۲)$$

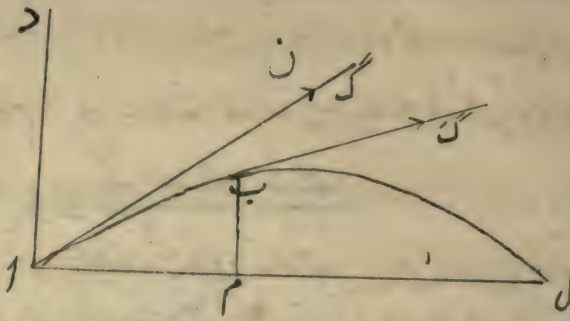
ان دو مساواتون سے مقام قب پر ذرہ کی سرعت اور سمت حرکت دریافت ہو سکتی ہیں اور حد ۲۷ کی مانند اسجگہہ بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ مقذوف کے ارتفاع اعظم پر یعنی پیرابولا کے نقطہ راس تک پہنچنے مین $\frac{\text{گ} \times \text{جب ہ}}{\text{ق}}$ وقت صرف ہوگا اور اُس مقام کی بلندی سطح افقی سے مساوی $\frac{\text{گ}^2\,\text{جب}^2\,\text{ہ}}{\text{۲ ق}}$ کے ہے ؛

(۱۳۴) فرض کرو کہ مقذوف سطح افقی کو نقطہ ل پر قطع کرتا ہے تو فاصلہ ا ل کو سطح افقی پر مقذوف کی وسعت کہتے ہین اور جتنا وقت ابتدا ے قذف سے اس مقام تک پہنچنے مین صرف ہوتا ہے اُسکو مقذوف کا وقت تاخت کہتے ہین فرض کرو کہ مقذوف کی وسعت سطح زمین پر و ہے اور وقت تاخت ت ہے تو بموجب حد مذکورہ بالا کے

$$\text{و} = \text{گ جم ہ} \times \text{ت}$$

$$\text{اور}\ \ ۰ = \text{گ جب ہ} \times \text{ت} - \tfrac{1}{2}\,\text{ق ت}^2$$

$$\therefore\ \text{ت} = ۰\ \ \text{یا} = \frac{\text{۲ گ جب ہ}}{\text{ق}} \ \ldots\ldots\ (۱)$$

$$\text{اور و} = \frac{\text{گ جم ہ} \times \text{۲ گ جب ہ}}{\text{ق}} = \frac{\text{گ}^2\ \text{جب ۲ ہ}}{\text{ق}} \ \ldots\ (۲)$$

فرض کرو کہ $\overline{ا م}$ = ل اور $\overline{ب م}$ = د

مقذوف کی سرعت ابتدائی گ کو متوازی ب م [illegible] ا م کے منفصل کرو تو ظاہر
ہے کہ کشش ثقل سمت الراس کی جزو منفصلہ کے مخالف عمل کرتی ہے۔ اور مقذوف کی حرکت
$\overline{ا ل}$ اور $\overline{ا د}$ کی سمتوں میں ایک دوسرے سے بالکل علٰحدہ فرض کیجا سکتی ہے

اسلئے ا م = ل = گ جم ہ × ص .... (۱)

ب م = د = گ جب ہ × ص − $\frac{1}{2}$ ق ص^2 .... (۲)

∴ د = ل × مس ہ − $\frac{\text{ق ل}^2}{\text{۲ گ}^2\ \text{جب}^2\ \text{ہ}}$ .... (۳)

مساوات، لازِ ۳ مقذوف کی مقام النقاط کو تعبیر کرتی ہے۔ اور مساواتوں نمبر (۱) و
(۲) سے مقذوف کا مقام کسی معین وقت کے انجام میں دریافت ہو سکتا ہے۔
اگر مقام ب پر مقذوف کی سرعت گَ ہو اور اُسکی سمت محور $\overline{ا ل}$ سے زاویہ φ بناوے
تو چونکہ مقام ب پر مقذوف کی سرعت کے اجزا منفصلہ متوازی محوروں کے جداگانہ

گ جم ہ و گ جب ہ − ق ص ہیں

∴ گَ جم φ = گ جم ہ

ثابت ہے کہ مساوات نمبر (۳) سے تعبیر شدہ پیرابولا کا محور خط سمت الراس مین ہوتا ہے اور خط ا م اس پیرابولا کا نقطہ ا سے گذرتا ہوا قطر ہے۔ اور نقطہ ا سے اُسکے نقطہ ماسکہ ع کا فاصلہ مساوی ہے $\frac{گ^{۲}}{م ق}$ کے +

(۱۳۲) طریق القذف کے نقطہ ماسکہ کا مقام حسب ذیل معلوم ہوسکتا ہے۔

فرض کرو کہ سمت قذف کامیلان سطح افقی سے ہ ہے اور زاویہ ل ا ع برابر θ کی ہے۔ تو بموجب اصولات پیرابولا کے ظاہر ہے کہ

خط ا ن جو نقطہ ا پر مماس ہے خطوط ا د اور ا ع کے درمیانی زاویہ کی تنصیف کرتا ہے +

$$\therefore \quad ۲ (\alpha - \theta) + \theta = ۹۰^{\circ}$$

$$\therefore \quad \theta = ۲\alpha - ۹۰^{\circ} \ldots\ldots\ldots (۱)$$

$$\text{اور}\quad ا ع = \frac{گ^{۲}}{۲ ق} \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

ان دو مساواتون سے نقطہ ع کا مقام معلوم ہوسکتا ہے۔

واضح ہو کہ اگر ہ برابر ہو ۴۵° سے تو نقطہ ماسکہ ع سطح افقی ا ل کے نیچے واقع ہوگا +

(۱۳۳) مقذوف کا مقام النقاط اور اُسکی حرکت کی تفصیل خط افقی ا ل اور خط راس ا د کو محور فرض کرنے سے بہی دریافت ہوسکتی ہین +

فرض کرو کہ ص وقت کے انجام میں مقذوف مقام ب پر پہنچا ہے

نقطہ ب سے ب م عمود ا ل پر کہینچو تو ا م اور ب م نقطہ ب کی محددین ہونگی

نقطہ ب سے دو خطوط ب ن و ب م متوازی سمت راس و سمت قذف کے کھینچو۔ بموجب دوسرے قانون حرکت کے ہم قیاس کر سکتے ہین کہ ذرہ نے سرعت گ کے ساتھ ص وقت مین ا ن فاصلہ طے کیا اور بباعث کشش ثقل کے اُسی عرصہ مین ن ب فاصلہ نیچے کی طرف گرا ۔

$$∴ ا ن = ب م = گ ص \ldots\ldots (۱)$$

$$ب ن = ا م = \frac{1}{2} ق ص^{2} \ldots\ldots (۲)$$

$$∴ ا م = \frac{1}{2} \cdot \frac{ق}{گ^{2}} \times ب م^{2}$$

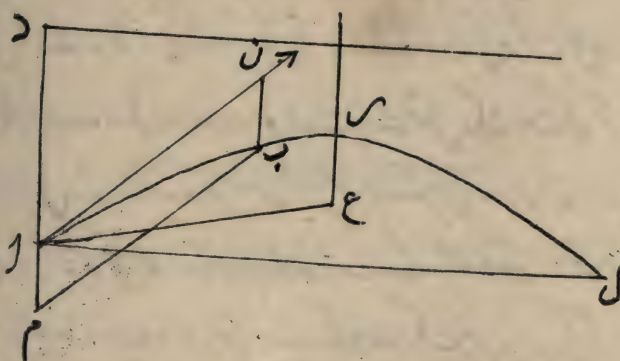
$$∴ ب م^{2} = \frac{۲ گ^{2}}{ق} \times ا م \ldots\ldots (۳)$$

اگر ا م و ا ن محور فرض کئے جاوین ۔ تو ا م اور ا ن نقطہ ب کے محدد ہونگے ۔

مساوات نمبر ۳ وقت ص پر منحصر نہین ہے ۔ یعنی حرکت کے ہر لحظہ کے لئے درست ہے اسلئے یہ مساوات د ب کے مقام النقاط کو تعبیر کرتی ہے ۔ علم ہندسہ بالجبر مین ثابت ہے کہ یہ مقام النقاط ایک خاص خط منحنی ہوتا ہے جسکو پیرابولا* کہتے ہین ۔ اور چونکہ ایسے مقذوفات کی حرکت جو سطح افقی سے کسی میلان پر مقذوف ہون اس خط منحنی مین ہوتی ہے اسواسطے اسکو طریق القذف بھی کہتے ہین ۔ علم ہندسہ بالجبر مین یہی

* بعض مصنفون نے اپنی کتاب مین اسکا نام قریب البعنوی رکھا ہے ہمنے انگریزی نام ہی استعمال کیا ہے ۔

ہوا کی تحریک بہی بہت زیادہ ہوتی ہے یہانتک کہ مقذوف کا واقعی فاصلہ طے شدہ بہ نسبت قیاسی فاصلہ کے بقدرہ ۲۵ یا ۰۳ حصہ کے کم ہوتا ہے - مگر اس مختصر رسالہ مین ایسی ادق باتو نکا حساب نہین ہوسکتا - جبکہ اس باب مین مقذوف کا ذکر آوے تو سمجھنا چاہئے کہ مقذوف خلا مین حرکت کرتا ہے یعنے ہوا کی تحریک بالکل ناموجود ہے +

(۱۳۱) جب کوئی ذرہ سطح افقی سے کسی میلان کی سمت مین سرعت معین کے ساتھ مقذوف ہو تو اُسکی حرکت دریافت کرو +

فرض کرو کہ ا ل سطح افقی ہے - کوئی ذرہ نقطہ ا سے سمت ا ن مین سرعت گ کے ساتھ مقذوف ہوا اب ظاہر ہے کہ ذرہ کی حرکت اُس سطح راس مین ہوگی جو ا ل و ا ن مین سے گذرتی ہے +

واضح ہو کہ ذرہ پر کوئی طاقت سواے کشش ثقل کے عمل نہین کرتی اور پہر جب دوسرے قانون حرکت کے طاقت کشش ثقل سرعت ابتداے گ کے اثر مین کچھ فرق پیدا نہین کرتی +

فرض کرو کہ ص وقت کے انجام مین ذرہ نقطہ ب پر پہنچتا ہے

چودھواں باب

مقذوفات کے بیان مین

(۱۳۰) سمت الراس مین مقذوفات کی حرکت کا ذکر مختصر طور پر تیسرے باب مین ہو چکا ہے اس باب مین عموماً ایسی حالتون کا بیان ہوگا جنمین سمت خذف سطح افقی کے ساتھ کوئی زاویہ بناتی ہو۔ مقذوفات کی حرکت کا پورا پورا حال بیان کرنا بہت ادق ہے اور علم کلیات سے تعلق رکھتا ہے کیونکہ اُس مین مندرجۂ ذیل مقدار ہائے غیر معین واقع ہوتے مین - (۱) مقذوف کی حرکت مدوری (۲) کشش ثقل کا اختلاف جو کہ مقذوف کے ہر لحظہ مختلف ارتفاعون پر پہنچنے سے واقع ہوتا ہے (۳) مقذوف کے عرصہ حرکت مین زمین کی گردش محوری وگردش شمسی - (۴) ہوا کی تحکیک جو کہ مقذوف کی سرعت کے مجذور کے متناسب بڑھتی جاتی ہے وغیرہ +

انمین سے اوّل تین غیر معین مقدارون کا اثر مقذوف کی حرکت پر بہ نسبت چوتھے کے کم ہوتا ہے پس اُنکو شمار مین نہ لانے سے کم غلطی واقع ہوگی مگر ہوا کی تحکیک کا اثر اسقدر زیادہ ہوتا ہے کہ اُسکو حساب مین نہ لانے سے بہت غلطی واقع ہوگی۔ ڈاکٹر ہاٹن صاحب اور دیگر حکماء نے بندوق وتوپ کے گولہ کی حرکت کے تجربون سے دریافت کیا ہے کہ ہوا کی تحکیک مقذوف کی سرعت کے مجذور کے متناسب بدلتی رہتی ہے۔ پس جب مقذوف کی سرعت بہت زیادہ ہو تو

ان دو شاقولون کی تعداد جنبش کا مجموعہ

$$= \text{تقریباً}\ ۲ \times ۲۴ \times (۶۰)^{۲} \times \left(۱ + \frac{۳م^{۲}}{۲^{۴}ل^{۲}}\right)$$

(۸) معلوم ہوا کہ ایک شاقول کسی مقام پر ایک معین وقت مین $\overline{د}$ دفعہ جنبش کرتا ہے۔ اور ایک اور مقام پر اُسی عرصہ مین $\overline{د'}$ دفعہ۔ تو ثابت کرو کہ اگر اول مقام پر کوئی رسّی کسی مادہ کے $\overline{ن}$ مکعب انچون کا وزن سہار سکے تو دوسرے مقام پر وہی رسّی مادہ کے $\frac{ن\,د^{۲}}{د'^{۲}}$ مکعب انچون کے وزن کو سہار سکے گی +

جواب $\frac{۱}{۳۵۹۰}$

(۳) دو شاقولوں کا طول جداگانہ ر̄ اور رَ̄ ہے جہانکہ ر اور رَ کا فرق بہت کم ہے۔ اور کسی مقام پر اُن کی ایک جنبش کا وقت جداگانہ س̄ و سَ̄ ہے

تو ثابت کرو کہ $\frac{سَ - س}{س} = \frac{۱}{۲} \times \frac{رَ - ر}{ر}$

(۴) کوئی گھڑی فی ۲۴ گھنٹہ مین بمقدار ۲ منٹ پیچھے ہو جاتی ہے اُسکے شاقول کے نیچے ایک پیچ لگا ہوا ہے جسکے گہمانے سے اُسکا طول کم زیادہ ہو سکتا ہے۔ اُس پیچ کے ایک انچ لنبائی مین ۵۰ بل ہین تو معلوم کرو کہ اُس گھڑی کو درست کرنے کے لئے اُس پیچ کو کتنی دفعہ گہمانا چاہئے۔

فرض کرو کہ اُس مقام پر سکینڈ شاقول کا طول ۳۹٫۲۴ انچہ ہے +

جواب ۵٫۴

(۵) معلوم ہوا کہ زمین کا جسم چاند کے جسم کی نسبت ۹۳ گنا بڑا ہے اور زمین کا قطر چاند کے قطر کی نسبت ۴ گنا بڑا ہے تو دریافت کرو کہ اگر زمین پر کے ایک سکینڈ شاقول کو چاند پر لیجا دین تو وہان اُسکی ایک جنبش کا عرصہ کیا ہوگا +

جواب $1\frac{۳}{۴}$ سکینڈ

(۶) کسی مقام پر ایک سکینڈ شاقول ۲۴ گھنٹہ مین ۱۲۰ دفعہ زیادہ جنبش کرتا ہے تو اُس مقام پر کشش ثقل کی قیمت دریافت کرو +

(۷) کسی مقام پر سکینڈ شاقول کا طول ل ہے۔ دو اور شاقولون کا طول (ل - م) اور (ل + م) ہے جہان م̄ کی قیمت بہت کم ہے تو ثابت کرو کہ ۲۴ گھنٹہ مین

مثال

فرض کرو کہ پہاڑ کی اونچائی ایک میل ہے اور زمین کا نصف قطر ۴۰۰۰ میل تو سیکنڈ شاقول اُس پہاڑ پر ۲۴ گھنٹہ مین سطح زمین کی نسبت کتنی دفعہ کم جنبش کریگا۔
اسجگہہ بموجب مساوات مذکورہ بالا کے

$$\frac{د - دَ}{۲۴ \times ۶۰ \times ۶۰} = \frac{۱}{۴۰۰۰}$$

$$\therefore د - دَ = ۲۱٫۶$$ تقریباً

یعنے شاقول پہاڑ پر بہ نسبت سطح زمین کے ۲۴ گھنٹہ مین قریباً ۲۲ دفعہ کم جنبش کرے گا۔

مثالات باب سیزدہم

(۱) دو مقامون پر کشش ثقل کی قیمت ق اور قَ ہے اور ایک شاقول ان مقامون پر ایک عرصہ معین مین دَ اور دَ دفعہ جداگانہ جنبش کرتا ہے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ق - قَ}{ق} = \frac{۲(د - دَ)}{د}$$ تقریباً۔

(۲) ایک شاقول شہر لنڈن مین ۲۴ گھنٹہ کے عرصہ مین ۸۵۹۴۵٫۶ دفعہ جنبش کرتا ہے اور وہی شاقول شہر پیرس مین اُسی عرصہ مین ۸۵۹۳۳٫۸۳ دفعہ جنبش کرتا ہے تو ان دو شہرون مین اکائی جسم کے وزن کا فرق معلوم کرو۔

$$\therefore\ \text{س} = \frac{\text{ن} + \text{ف}}{\text{ن}}\ \text{یعنی}\ \text{ف} = (\text{س} - ۱) \times \text{ن}$$

(۱۲۹) - اگر کسی معین طول کا شاقول کسی عرصہ معین س مین زمین پر د دفعہ جنبش کرے اور کسی پہاڑ کے اوپر دَ دفعہ جنبش کرے تو پہاڑ کی اونچائی دریافت کرو +

اس سوال مین زمین پر شاقول کی ایک جنبش کا عرصہ = $\frac{\text{س}}{\text{د}}$ اور پہاڑ پر ایک جنبش کا عرصہ = $\frac{\text{س}}{\text{دَ}}$

$$\therefore\ \frac{\text{س}}{\text{د}} = \pi \sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ق}}}$$

$$\text{و}\ \frac{\text{س}}{\text{دَ}} = \pi \sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{قَ}}}$$

$$\therefore\ \frac{\text{د}}{\text{دَ}} = \sqrt{\frac{\text{ق}}{\text{قَ}}} = \frac{\text{ن} + \text{ف}}{\text{ن}} = ۱ + \frac{\text{ف}}{\text{ن}}$$

$$\therefore\ \frac{\text{د} - \text{دَ}}{\text{د}} = ۱ - \frac{۱}{۱ + \frac{\text{ف}}{\text{ن}}} = ۱ - \left(۱ + \frac{\text{ف}}{\text{ن}}\right)^{-۱}$$

$= \frac{\text{ف}}{\text{ن}}$ تقریباً کیونکہ ف نہایت کم ہے بمقابلہ ن کے

$$\therefore\ \text{ف} = \frac{\text{د} - \text{دَ}}{\text{د}} \times \text{ن}$$

$\therefore$ ق = $\pi^2 \times$ ر = ۳۸۶٫۲۸ انچہ فی سکنڈ

= ۳۲٫۱۹ فٹ فی سکنڈ

(۱۲۷) جو شاقول ایک سیکنڈ مین ایک دفعہ جنبش کرتا ہے اُسکو سیکنڈ شاقول کہتے ہین۔ سیکنڈ شاقول کا طول زمین کے مختلف ارتفاعو نپر مختلف ہوتا ہے کیونکہ کشش ثقل کی قیمت مختلف ہوتی ہے ✦

(۱۲۸) شاقول کے مشاہدہ سے پہاڑ وغیرہ کی اونچائی دریافت ہوسکتی ہے

(مثال)

اگر مشاہدہ سے معلوم ہو کہ کسی پہاڑ پر سیکنڈ شاقول سَ سیکنڈ مین ایک دفعہ جنبش کرتا ہے تو اُس پہاڑ کی اونچائی کیا ہوگی۔

فرض کرو کہ پہاڑ کی اونچائی فَ فٹ ہے اور زمین کا نصف قطر نَ فٹ ہے اور پہاڑ کے اوپر کشش ثقل کی قیمت قَ ہے۔

$$\text{تو } ۱ = \pi \sqrt{\frac{ل}{ق}}$$

$$\text{سَ} = \pi \sqrt{\frac{ل}{\text{قَ}}}$$

$$\therefore \frac{\text{قَ}}{ق} = \frac{۱}{\text{سَ}^2}$$

$$\text{لیکن } \frac{\text{قَ}}{ق} = \frac{ن^2}{(ن + ف)^2} \quad \text{(دیکھو دفعہ ۱۰۳)}$$

اب واضح ہوگا کہ عمود مماس کی سمت کا جزو منفصلہ ق جم θ باعث کشش تار کے زایل ہوجاتا ہے۔اور مماس کے سمت کا جزو منفصلہ ہی شاقول مین اسراع پیدا کرتا ہے +

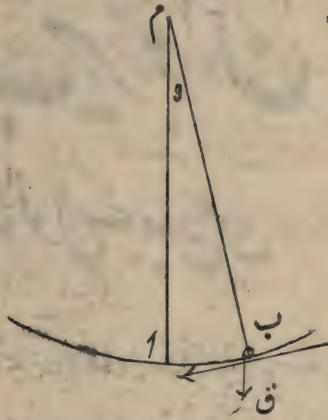
مگر چونکہ زاویہ θ بہت چھوٹا ہے پس قطعہ دائرہ ا ب نقطہ ب کے مماس کے سمت کے ساتھ منطبق ہوتا ہے اور جب θ = θ اس سے ثابت ہوا کہ شاقول کی اسراع کی سمت ہر لحظہ مین نقطہ ا کے سمت مین ہے اور یہ اسراع = ق جب θ = ق θ = $\frac{ق}{م}$ × ا ب اس مساوات سے ظاہر ہوتا ہے کہ شاقول کا اسراع کسی نقطہ پر نقطہ ا سے اُسکے فاصلہ کے متناسب ہے اسلئے اگر شاقول کا عرصہ جنبش س ہو تو بموجب حد ۵۹ کے

$$\frac{ق}{م} = \left(\frac{\pi}{س}\right)^{2} \therefore س = \pi \sqrt{\frac{م}{ق}}$$

مساوات مذکورہ بالا سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ہم زمین کے کسی مقام پر معین طول کے شاقول کی ایک جنبش کا عرصہ دریافت کر سکین تو اُس مقام کے کشش ثقل کی قیمت دریافت ہوسکتی ہے۔مثلاً تجربہ سے معلوم ہوا کہ شہر لنڈن مین شاقول جسکا طول ۳۹٫۱۳۹۳ انچہ ہے ایک سیکنڈ مین ایک جنبش کرتا ہے۔تو بموجب مساوات مذکورہ بالا کے اگر اُس مقام کے کشش ثقل ق سے تعبیر کیجاے تو

$$۱ = \pi \sqrt{\frac{م}{ق}}$$

(۱۲۶) اگر کوئی شاقول خط ر اس کے ساتھ دو تین درجہ تک کا زاویہ بناکر اُس کے دونون طرف ہلتا رہے تو اُس کی ایک جنبش کا وقت دریافت کرو؟

م
ع
ب
ا
ق

تعریف - جو وقت شاقول کو خط راس کی ایک طرف کے فاصلۂ علیا سے دوسری طرف کے فاصلۂ علیا تک جانے مین صرف ہوتا ہے اُسکو شاقول کا عرصۂ جنبش کہتے ہین اور شاقول کے طول سے اُس تار کا طول مراد ہوتا ہے جس سے کہ وہ لٹکایا جاتا ہے۔

فرض کرو کہ کوئی شاقول (۲) خط راس م ا کے دونون طرف حرکت کرتا ہے اور کسی لحظہ مین مقام ب پر پہنچتا ہے اور فرض کرو کہ زاویہ ا م ب = ۵ جو بموجب دعوے کے دو یا تین درجہ سے زیادہ نہین اور تار ۲ م کا طول برابر ر کے ہے تو ظاہر ہوگا کہ ب مقام پر دو طاقتین شاقول پر عمل کر رہی مین یعنی کشش ثقل اور کشش تار - کشش ثقل (ق) کو دو اجزا مین منفصل کرو - ایک نقطہ ب کے مماس کے سمت مین اور دوسری اُسکی سمت عمود مین ؛

باب تیرہوان

شاقول کے بیان مین

(۱۲۴) شاقول کے باب میں پوری پوری بحث ادنے ریاضی میں نہیں ہوسکتی لہذا ہم صرف اُسکی بحث میں صریح صریح باتونکا ذکر کرکے کفایت کرینگے*

(۱۲۵) شاقول ایک چھوٹا وزن دار گیند ہوتا ہے جو کہ ایک پتلی دہاگہ یا تار کے ایک سرے سے لٹکتا رہتا ہے۔ اور اُس تار کا دوسرا سرا ایک کیل سے بندھا ہوا ہوتا ہے۔ جب شاقول ساکن رہتا ہے تو تار سمت راس میں قائم رہتی ہے لیکن اگر اُسکو کچھ حرکت دیجاوے تو خط راس کے دونون طرف برابر فاصلون پر ہلتا رہتا ہے۔ اسکا باعث یہ ہے کہ جب شاقول خط راس کیطرف لوٹ کر آتا ہے اُس وقت اُسکی سرعت محصلہ خط افقی مین ہوتی ہے جو اُسکو خط راس کی دوسری طرف برابر فاصلہ پر لیجاتی ہے۔ اور اسیطرح اُسکی حرکت خط راس کے دونون طرف جاری رہتی ہے جبتک کہ اُسکو ہوا کی تحکیک تار کی استقامت اور نقطہ بندش پر کیل پر دباؤ وغیرہ اُسکو پہر ساکن نہین کردیتا۔ اگر روک ہاے مذکورہ بالا موجود نہوتین تو ایک دفعہ شاقول کو حرکت دینے سے وہ دوام تک حرکت کرتا رہتا*

کے نقطہ اسفل سے نیچے واقع ہی خط نطبی النزدل دریافت کرو ٭

جواب - پہلے دایرہ کے نقطہ اسفل اور دوسرے دایرے کے نقطہ راس کے خط وصل کنندہ کو دونو دائیرون تک بڑہاوین تو خط مطلوب حاصل ہوگا ٭

کیونکہ اسراع کم ہونے سے رسی کی کشش بڑھ جاتی ہے +

(۲۲) ۳۰ درجہ کے میلان کی سطح مائل پہ ایک جسم ج رکھا ہوا ہے اور ایک دوسرا جسم جَ سطح مائل کی چوٹی پر پھرکی کسے گذرتی ہوئی رسی سے بندھا ہوا ہے اور عمود سمت راس مین گرکر جسم اول کو سطح مائل کے اوپر کھینچتا ہے اگر سطح مائل پر اُس کا اسراع $\frac{ق}{۴}$ ہو تو ثابت کرو کہ ج اور جَ باہم مساوی ہونگے +

(۲۳) مثال بالا مین فرض کرو کہ جس قدر وقت مین جسم جَ جسم ج کو سطح مائل کے پائون سے چوٹی تک کھینچتا ہے اُس سے دوچند وقت مین جسم ج جسم جَ کو سطح مائل پر اُسی قدر کھینچ سکتا ہی تو اجسام کی نسبت کو دریافت کرو۔ جواب ۳ : ۲

(۲۴) ایک رسی کے سرون سے جو کسی سطح مائل کی چوٹی کی پہرکی سے گذرتی ہے ایک طرف سات پونڈ اور دوسری طرف ۴ اور ۵ پونڈ وزن کے دو جسم بندھے ہوئے ہین جبکہ یہ پچھلے جسم ۱۲ فٹ نیچے گری تھی تو ۴ پونڈ کے جسم کو علیحدہ کر لیا گیا تو معلوم کرو کہ باقی ۵ پونڈ کا جسم کسقدر نیچے ہوکر ساکن ہو جائیگا   جواب ۹ فٹ

(۲۵) اٹیوڈ صاحب کے آلہ مین اگر پھرکی صرف رسی کے دونون سرون کے اجسام کے نصف وزن تک سہار سکے تو ثابت کرو کہ بڑا جسم چھوٹی جسم کے (۳ + ۲√۲) گنا سے کم نہ ہونا چاہیئے

(۲۶) سطح راس مین کسی دائرہ کے محیط سے اُسکی کسی بیرونی نقطہ تک جو کہ اُس دائرہ کے نقطہ اسفل سے نیچے واقع ہے خط بطی النزول دریافت کرو

جواب نقطہ معین اور دائرہ کے نقطہ اسفل کو ملا کر خط کو محیط تک دراز کرو تو خط مطلوب حاصل ہوگا +

(۲۷) کسی دائرہ کے محیط سے بیرونی دائرے تک جسکا نقطہ اعلا اس اول دائرہ

(۱۵) سطح افقی پر کسی ۱۰ پونڈ کے جسم پر ۵ پونڈ کی طاقت عمل کرے کتنے وقت مین ۵۰ فٹ فاصلہ طی کرا ے گی اور اُس فاصلہ طی کرنے مین اُس جسم کو کسقدر سرعت حاصل ہوگی - جواب $\sqrt{\frac{۱۰۰}{ق}}$ اور $\sqrt{۵۰ ق}$

(۱۶) ایٹوڈ صاحب کے آلہ مین ہر دو بڑے جسم ایک ایک پونڈ کی ہین اور چھوٹا طویل جسم $\frac{۱}{۴}$ اونس کا ہے تو ثابت کرو کہ ابتدار سے ۴ سکنڈ کے انجام مین جسم کی سرعت محصلہ ہر سکنڈ مین ایک فٹ ہو گی ؛

(۱۷) کوئی ذرہ کسی سطح مائل پر پھسلتا ہے اُس سطح کی بلندی ایک مقدار مستقل ہے تو ثابت کرو کہ اُسکے پھسلنے کا وقت سطح کے میلان کے (قطع) کے متناسب ہے ؛

(۱۸) کسی سطح راس پر دایرہ کے محیط مین ایسا ایک نقطہ معلوم کرو کہ اُس نقطہ سے مرکز تک کسی ذرہ کے پھسلنے کا وقت اُس نقطہ سے دایرہ کے نقطہ سفل تک وتر پر پھسلنے کے وقت کے مساوی ہو

جواب دائرہ کے نقطہ اعلیٰ سے ۶۰° کے فاصلہ پر

(۱۹) سطح راس مین دایرہ کے محیط پر ایک ایسا نقطہ دریافت کرو کہ اگر اوس نقطہ پر اُس دایرہ کا مماس کھینچکر قطر راس خارجہ سے ملایا جاے تو اُس مماس پر کسی ذرہ کے پھسلنے کا وقت اُس قطر پر پھسلنے کے وقت کے مساوی ہو

جواب نقطہ اعلی سے ۳۰° کے فاصلہ کو

(۲۰) ایٹوڈ صاحب کے الہ مین جبکہ اجسام کی سرعت گ کے مساوی ہے رسی کو کاٹ دیا گیا تو اُسکے بعد عرصہ ص کے آخر مین رسی کے دونون سرون پر کے اجسام مین فاصلہ دریافت کرو۔ جواب ۲ گ ص

(۲۱) اُسی آلہ مین اگر اجسام کے مجموعہ کو مستقل رکھا جاسے تو ثابت

ہونگے اور یہ بھی ثابت کرو کہ اُن سب ذرون سے گذرتا ہوا ایک دایرہ
بنایا جا سکتا ہے

(۱۱) ایک جسم جَ سمت الراس مین نیچے گرتے ہوئی دوسرے جسم جَ
کو کھینچتا ہے جو کہ ایسی ایک سطح مائل کے پانون مین رکھا ہوا ہے جسکا طول لَ
اور ارتفاع ر ہے اور اُوسکے ساتھ رسی سے بندھا ہوا ہے اور
اُس سطح مائل کے پانون سے اُسے اوپر کھینچتا ہے تو دریافت
کرو کہ جسم جَ کو سطح مائل پر کسقدر اُٹھنے کے بعد اگر رسی کو کاٹ دیا جاے
تو بھی وہ اُسکی راس تک اُٹھ سکے جواب $\frac{(ج + جَ)}{ج} \times \frac{ر ل}{ل + ر}$

(۱۲) ایک پھرکی پر گذرتی ہوئی رسی کے ہر دو سرون مین ۴ اونس اور
۵ اونس وزن کے دو جسم لٹکائے ہوئے ہین - ابتدا سے ۳
سکنڈ کے آخر مین ۵ اونس کا جسم کسقدر نیچے گریگا -
جواب قریباً ۱۶ فٹ

(۱۳) پھرکی کے اوپر سے گذرنیوالی رسّی کے دونون سرون سے ۵ اور ۷
پونڈ وزن کے جسم بندھے ہوئے لٹکتے ہین - ابتدا سے ایک سکنڈ کے
بعد اُس رسّی کو کاٹ دیا گیا تو دوسرے سکنڈ کے آخر مین ۷ پونڈ کے
جسم کی سرعت کیا ہوگی جواب $\frac{۷ق}{۶}$

(۱۴) کسی سطح مستوی پر ایک ۷ پونڈ کا جسم رکھا ہوا ہے اور دوسرا
ایک پونڈ کے وزن کا جسم جو کہ جسم اول کے ساتھ رسی سے بندھا ہوا ہے
سطح راس مین گرکر اُسے کھینچتا ہے تو ۴ سکنڈ مین وہ کتنا فاصلہ طے
کریگا - جواب ق فٹ

(۶) سطح راس مین کوئی ایک دایرہ ہی اُس کا وہ قطر معلوم کرو کہ جسپر سے ذرہ کو گرنے مین اُسی قدر وقت لگے جتنا کہ قطر سمت الراس کے گرنے مین لگتا ہی۔ جواب میلان = ۶۰

(۷) سطح راس پر دو دایرہ ہین جو کہ ایک دوسری کو مس کرتی ہین یعنے ایک کا نقطہ اعلی اور دوسرے کا نقطہ اسفل ایک ہی ہی۔ دایرہ اول پر کوئی نقطہ فرض کرو اور نقطہ مماس سے اوسی وصل کرکے دوسری دایرہ کے محیط تک بڑھادو۔ تو ثابت کرو کہ اُس خط پر کسی ذرہ کے پہسلنے کا وقت ہر حالت مین مستقل رہیگا۔

(۸) سطح راس پر کسی دایرہ کے نقطہ اعلی آ سے آب کوئی وتر کھینچا گیا ہی اور اُس وتر کو قطر فرض کرکے دوسرا دایرہ بنایا گیا نقطہ ب پر اول دایرہ کا مماس دوسری دایرہ کو نقطہ ج پر قطع کرتا ہے ثابت کرو کہ خط ج ب پر کسی ذرہ کے پہسلنے کا وقت مستقل رہیگا۔

(۹) مفصلہ ذیل حالتون مین کسی ذرہ کا خط سریع النزول دریافت کرو۔

(ا) کسی دایرہ کے محیط سے اُسکے اندرونی نقطہ معین تک

(ب) دایرہ کے محیط سے اُسکی کسی بیرونی خط معین تک

(۱۰) کئی بلّے جو ایک ہی سطح مین نہین ہین نقطہ راس پر ملی ہوئی ہین ایک ہی لحظہ مین ہر ایک بلّے مین ایک ذرہ پہسلتا ہے اگر وہ بلے اسطرح رکھی ہوئی ہون کہ وہ سب ذرے کچھ عرصہ کے بعد ایک ہی سطح مین موجود ہون تو ثابت کرو کہ اسکے بعد ہر لحظہ مین وہ سب ذرے ایک ہی سطح مین موجود

مثالات متعلق باب دوازدہم

(۱) کوئی ذرہ کسی ہموار سطح مائل پر پھسلتا ہے اور اُس پر پھسلتے ہوئے جسقدر عرصہ صرف ہوتا ہے کسی دوسری ذرہ کی عرصہ حرکت کا جو سطح مائل کی چوٹی سے سطح زمین پر گرتا ہے ن گنا ہے تو اُس سطح مائل کا میلان دریافت کرو۔ جواب جب $\frac{۱}{ن}$)

(۲) ایک سطح مائل پر جسکا زاویہ میلان ۳۰° ہے سرعت ابتدائی ق سے اُسکے ارتفاع کی طرف کوئی ذرہ مقذوف ہوا تو ق فٹ طے کرنے مین اُسے کسقدر عرصہ لگے گا - جواب ۲ سکنڈ

(۳) کسی سطح مائل کے طول کو ایسے دو حصون پر تقسیم کرو کہ جسمین کوئی ذرہ پھسل کر مساوی وقت مین ہر دو حصون کو طے کر ے + جواب ۱ : ۳

(۴) کسی سطح مائل کو جسکا طول ل ہے ن حصون مین تقسیم کرو تاکہ کوئی ذرہ پھسلکر ہر ایک حصہ کو مساوی وقت مین طے کرے - جواب

$\frac{ل}{ن^۲}$ و $\frac{۳ل}{ن^۲}$ و $\frac{۵ل}{ن^۲}$ .... وغیرہ

(۵) کسی سطح مائل کا طول ل ہے اور ارتفاع ت ہے اُسکی چوٹی سے کوئی ذرہ نیچے کی طرف خط راس سے گرایا گیا دریافت کرو کہ اُسی چوٹی سے دوسری ذرہ کو کس سرعت ابتدائی سے پھسلایا جاے تاکہ ہر دو ذرہ ایک ہی لحظہ مین سطح مستوی پر پہونچین - جواب $\frac{ق\,ل^۲ - ت^۲}{ت\,۲\,ق\,ت}$

ما پر کشش ثقل جو کہ جسم (۲ ج + ما) کی اسرع کا باعث ہے ضرور ایک طاقت مستقل ہی (دیکھو حد ۳۲) اور مادہ خواہ کسی قسم کا ہو یہی نتیجہ مشاہدہ سے حاصل ہوگا *

واضح ہو کہ ہوا کی تحکیک رسّی کے لاسطبقی وغیرہ کے باعث سے مشاہدہ مذکورہ بالا مین بہت فرق آجاتا ہے اس لئے حکماء نے کشش ثقل کے مقدار کے دریافت کے لئے شاقول کے مشاہدہ کو ترجیح دی ہے جسکا بیان باب آئندہ مین ہوگا *

(ب) حد ۸۰ مین ثابت ہوا ہی کہ جب کوئی طاقت ط جسم ج پر عمل کرکے اسراع ع پیدا کرتی ہے تو ط ∝ ج ع۔ ٹیوڈ صاحب کے آلہ کے تجربہ سے اِس نسبت پر بھی اطمینان ہوتا ہے۔ اِس آلہ مین شے کا اسراع = $\frac{\text{ر ق}}{\text{۲ج + ر}}$ (دیکھو حد ۱۲۲)

مکرر واضح ہو کہ یہان جسم ر کا وزن ہی اسراع کا باعث ہے اور یہ وزن جسم (۲ ج + ر) پر عمل کرکے اِس اسراع کو پیدا کرتا ہے اَب اگر آلہ مین جسم ر کو مختلف لیا جاوی مگر جسم ج کو ایسا بدلتے جائین کہ (۲ ج + ر) ایک ہی رہی تو مشاہدہ سے معلوم ہوگا کہ ہر حالت مین اسراع ع جسم ر کا متناسب ہی یعنی اِس سے ثابت ہوتا ہے کہ کسی جسم مفروضہ متحرک کا اسراع پیدا شدہ طاقت معاملہ کے متناسب ہو

پھر اگر ر کو مستقل رکھکر صرف جسم (۲ ج + ر) کو بدلا جاسے تو مشاہدہ سے معلوم ہوگا کہ اسراع پیدا شدہ جسم (۲ ج + ر) سے نسبت معکوس رکھتا ہے پس اِن ہر دو سے ثابت ہوتا ہے کہ ط ∝ ج ع

(ج) حد ۱۰۱ مین کہا گیا ہے کہ کشش ثقل ایک طاقت مستقل ہی یعنی ہر جسم پر یہ کشش اسراع یکسان پیدا کرتی ہی۔ ٹیوڈ صاحب کے آلہ سے اِسکی بھی تصحیح ہو جاتی ہے مثلاً اگر حلقہ ہ کو بلے کے مختلف مقامات پر لگایا جاوے تو مشاہدہ سے معلوم ہوگا کہ فاصلہ ب ہ ہر حالت مین ص وقت کا متناسب ہوگا اور جسم ج اور ر کو خواہ کسیطرح بدلا جاسے اِس مشاہدہ کی تصحیح مین کچھ فرق نہین آوی گا اِسلئے جسم

جائیگا۔ آ سے ہ تک اور ہ سے د تک فاصلے بلّی کے درجون سے معلوم ہوجائینگے فرض کرو کہ وہ ف اور فَ ہین اور ان فاصلے کے طے کرنے مین جسقدر وقت گزرے وہ ص اور صَ ہین تو

ف = $\frac{1}{2}$ ع ص^2 = $\frac{1}{2}$ × $\frac{\text{م ق}}{\text{۲ج + م}}$ × ص^2 .... (۱)

اور ہ پر پہونچنے مین جسم کی سرعت محصلہ = ع ص

∴ فَ = ع ص صَ = $\frac{\text{م ق ص صَ}}{\text{۲ج + م}}$ .... (۲)

مساوات (۱) یا (۲) سے ق کی قیمت معلوم ہوجائیگی اور اسی طرح کرہ ارض کے کسی جگہ پر تجربہ کرنے سے کشش ثقل کا مقدار معلوم ہوتا ہے +

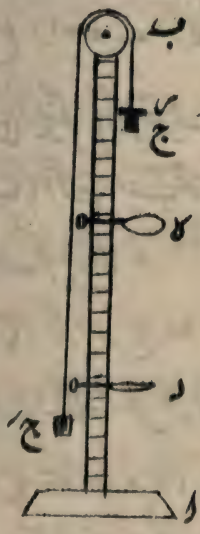
(۱۲۳) کشش ثقل کے معلوم کرنیکے سوای اٹیوڈ صاحب کا آلہ اور تجارب کیو اسطے بھی مفید ہی

(۱) اِس آلہ کے تجربہ سے اول قانون حرکت کی تحقیق پوری پوری ہوجاتی ہی مثلاً بحث مندرجہ بالا مین کہا گیا ہے کہ جب جسم (ج + م) حلقہ ہ پر پہونچتا ہے تو م اس حلقہ پر اٹک رہتا ہے اور بعد از ان جسم ج سرعت یکسان سے نیچے کی طرف حرکت کرتا ہے۔ اِسکی صحت اول قانون حرکت کی صحت پر منحصر ہے۔ پس پٹی (د) کو مختلف مقامون پر پیچ سے لگانے سے دریافت ہوتا ہے کہ ہ د فاصلہ طے کرنیکا وقت ہمیشہ اُس فاصلہ (یعنی ہ د) کے متناسب رہتا ہے گویا اِسمین جسم کی سرعت یکسان ہے اور یہ اول قانون حرکت کے صحت کی ایک بڑی پختہ دلیل ہے +

اسکے اوپر ایک چھوٹی سی پھرکی ہی اور اسکے دَوَرہ کا محور اور دو چھوٹے
پھرہی پر رکھا ہوا ہے تاکہ پھرکی کی گھومانی مین کچھ طاقت صرف نہ ہو
سکتے ه کو ہی ایک حلقہ ہی جسکو اس بلے مین کسی جگہ پیچ کے ذریعہ سے لگا
سکتے ہین اور اِسطرح د ایک پٹی ہی جو پیچ سے اُس بلے مین کسیجگہ لگ سکتی ہی
اُس پھرکی کہ اوپر سے ایک رسّی دونون طرف لٹکتی ہی جسکے ساتھ
دو مساوی وزن کے جسم بندھی ہوئی ہین ۔ اور تجربہ کے تغیر
وتبدل کے لیے کئی چھوٹی چھوٹی وزن اور ایک گھڑی بھی اس آلہ کے ساتھہ
ہوتی ہی۔ اِس آلہ کا اصل مدعا کشش ثقل کا دریافت کرتا ہے اور وہ
طریقہ ذیل سے معلوم ہوتا ہے فرض کرو کہ آلہ مین جسم ج ارتفاع
اعلی پر واقع ہے تو چونکہ ج اور جَ برابر ہین اسلئے ابتدا ہین اُنمین
کچھ حرکت نہ ہوگی اَب اگر جسم ج پر ایک سیخ کی طرح لمبا جسم مَا رکھا
جاوے تو جسم ج + مَا نیچے کی طرف گرنے لگیگا اور مَا کا مقدار جسقدر
کم ہوگا اُسی قدر اُسکا اسراع بھی کم ہوگا کیونکہ ع = مَا ق / ۲ج + مَا (دیکھو جملہ ۱۲۱ شاخ ۵)
جب جسم (ج + مَا) حلقہ ه پر پہونچتا ہے تو جسم ج اُس حلقہ
مین سے گذر جاتا ہے مگر مَا اُسکے اوپر اٹک رہتا ہے اِس لمحہ
سے رسّی کی سرون پر ہر دو جسم برابر ہو جاتے ہین اور اسلئے اسراع
کچھ نہین ہوگا۔ مگر ابتدا سے ه تک گرنے ہین جسم ج نے جسقدر
سرعت حاصل کی ہی اُسی سرعت سے وہ نیچے کی طرف یکسان طور
گرتا رہیگا (بموجب اول قانون حرکت) اور آخرش پٹی د پر آکر ٹھہر

(د) اگر جَ سطح افقی پر رکہا ہوا ہو تو ھ = ۰ اور ع = ج جب ھ ق / ج + جَ

(و) اگر جَ سطح افقی پر رکہا ہو اور ج خط راس مین گرتا ہوا اوسکو کھینچے تو ھ = ۹۰° دو = ۰ ∴ ع = ج ق / ج + جَ راس سے معلوم ہوتا ہے کہ جَ خواہ کسی قدر بہ نسبت ج کے کم ہو وہ جَ کو کھینچکر اوس مین حرکت پیدا کریگا ٭

(ہ) اگر دو جسم کی حرکت خط راس مین ہو یعنی اگر رسی ایک چرخی قایم پر سے گذرے جس سے کہ جسم بندھی ہوئی ہین تو ھ = ۹۰° و دو = ۹۰° اور ع = (ج − جَ) / (ج + جَ) × ق اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ اگر ابتدا مین کوئی سرعت اون مین موجود نہ ہو تو وہ ہر دو متحرک ہونگے بشرطیکہ ج بڑا ہو جَ سے

(۱۴۲) ہمنے پہلے ایوڈ صاحب کے آلہ کا جو ذکر کیا ہے اوس کا اصول شکل مذکورہ بالا پر منحصر ہے اس آلہ کی ترکیب و استعمال اس جگہ مختصراً بیان کیا جاتا ہے ٭

ا ب ایک بلا درجہ لگایا ہوا ہے اور عین سمت الراس پہ کھڑا ہے

= ش − جَ ق جب ھَ

∴ ع = (جَ ق جب ھَ − ش) / ج = (ش − جَ ق جب ھَ) / ج (دیکھو حد ۸۰)

∴ ع = (ج جب ھ − جَ جب ھَ) / (ج + جَ) × ق ...... (۱)

اور ش = (جب ھ + جب ھَ) ج جَ × ق / (ج + جَ) .... (۲)

مساوات (۱) سے ظاہر ہوتا ہی کہ اسرع ع یکسان ہی اور اگر اجسام کی سرعت ابتدائی معلوم ہو تو اوس کا فاصلہ طے شدہ وقت حرکت اور سرعت حاصلہ وغیرہ باب سیوم کی حدود سے دریافت ہو جاوینگے حد مذکورہ کی کئی خاص صورتین بیان کی جاتی ہین +

(ا) مساوات اول سے ظاہر ہے کہ اگر ج جب ھ = جَ جب ھَ تو ع برابر صفر کے ہوگا گویا اس حالت مین ہر دو جسم یا تو حالت سکون مین رہینگے یا اگر متحرک ہون تو سرعت یکسان سے متحرک رہینگے

(ب) اگر جَ جب ھَ بڑا ہو ج جب ھ سے تو جسم ج کو اوپر کی طرف کھینچیگا +

(ج) اگر جسم جَ خط سمت الراس مین نیچے گر کر جسم ج کو سطح مائل پر اوپر لانے کی کوشش کرے تو ھَ = ۹۰° + اور ع = (جَ − ج جب ھ) ق / (ج + جَ)

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر جَ جب ھ > ج سے تو اسرع جَ کا سطح مائل کے نیچے کی طرف ہوگا +

اُن مین نقاط ط اور طَ پہ دو

جسم ج اور جَ واقع ہین اور

وہ ایک رسّے سے جڑے ہوئی

ہین جو کہ نقطہ راس پہ ایک چرخی

کے اوپر سے گذرتی ہے

اون اجسام کی حرکت دریافت کرو

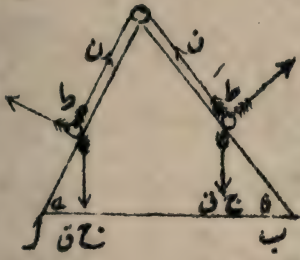
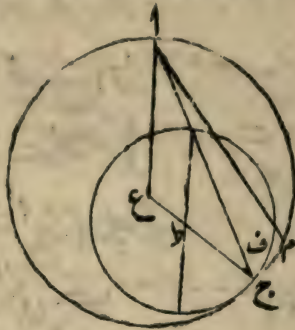
فرض کرو کہ ہر دو سطح مائل سطح افقی سے جداگانہ زاویہ (ھ) اور (ھَ) بناتی ہین۔

اور وزن اجسام کا ج ق اور جَ ق ہے

چونکہ رسّی جس سے وہ بندھی ہوئی ہین بالکل ملایم اور غیر لاسطیق ہے اِسلئے ایک جسم کی کشش دوسرے جسم پر بموجب سیوم قانون حرکت کی مقدار مین مساوی اور سمت مین مخالف ہی فرض کرو کہ وہ کشش

ش سے تعبیر ہوتی ہی اور چونکہ رسّی ہر وقت تنی ہوئی ہی پس ایک جسم اپنی سطح پر جسقدر فاصلہ نیچی کی طرف کسی وقت مین گرتا ہے دوسرا جسم بھی اپنی سطح پہ اُسی وقت مین اُسی قدر فاصلہ اوپہ جاتا ہی پس ہر دو جسم کا اسراع برابر ہے۔

فرض کرو کہ جسم ج نیچے گرتا ہے اور جَ اپنی سطح مین اوپہ جاتا ہے اور ان کا اسراع ع ہے تو ظاہر ہے کہ جسم ج پہ اسراع پیدا کرنیوالی طاقت

= ج ق جیب ھ - ش - اور جسم جَ پہ اسراع پیدا کرنیوالی طاقت

وب خط کو دائرہ کے محیط ج تک بڑھاؤ
توخط اج خط مطلوب ہوگا
فرض کروکہ اع خط راس ہے اور خط ج ط اسکو نقطہ ع پر
قطع کرتا ہے ۔ تو ظاہر ہوگا کہ اع = ج ع اسلیے ایک دائرہ
جسکا مرکز ع ہے اور نصف قطر ع ج ہے دائرہ ب ج د کو نقطہ
ج پر مس کریگا اور وہ وس کا نقطہ راس ہوگا وف ہ ۔ کوئی خط کھینچو
پس معلوم ہوگا کہ خط اج پر کسی ذرہ کے وقت حرکت خط اہ
پر اُسکی وقت حرکت کے برابر ہے اور چونکہ یہ وقت خط وف پر
وقت حرکت سے زیادہ ہے اسلیے اج پر وقت حرکت بھی اف پر وقت
حرکت سے زیادہ ہے ۔ پس ثابت ہوا کہ نقطہ ا سے دائرہ
ب ج د تک جو خطوط کھینچیں جاویں اُن میں سے خط اج پر کسی ذرہ
کے حرکت سب سے لطی ہوتی ہے ۔ اِسلیے خط اج خط لطی النزول
ہے ❖

دو ہموار سطح مایل راس پر لطی ہوتی ہیں

اسکلے ثبوت کے لئے یاد رکھنا چاہئے کہ شکل مندرجہ شاخ (ج)
مین ثابت ہو چکا ہے کہ خط مطلوب ضرور نقطہ ج سے گذریگا اور
بموجب حد ۱۱۹ کے خط اب سے دایرہ کے محیط تک خط سریع النزول
د ہ ہوگا ●

(ز) کسی دایرہ معین کے محیط سے کسی اور دایرہ اندرونی کے محیط
تک خط سریع النزول دریافت کرو

دونون دوایر کے نقاط اسفل کو ملا کر خط وصل کنندہ کو بڑھا دو تو اس خط کا جو
حصہ ہر دو دوایر کے مابین واقع ہے وہی خط مطلوب ہوگا۔
اس کا ثبوت مثل ثبوت بالا کے ہے ●

ہمنے اشکال متذکرہ بالا مین سطح راس کو جسم کی سطح حرکت فرض کیا ہے
اگر ذرہ کی سطح حرکت سطح مایل ہو تو بھی بیان مندرجہ بالا درست
ہوگی صرف ایسی حالت مین سطح مایل پر حرکت کے سبب سے اسرع
کشش ثقل کو ق جب ہ لینا چاہئے جہانکہ ہ سطح مایل کا میلان
ہو ●

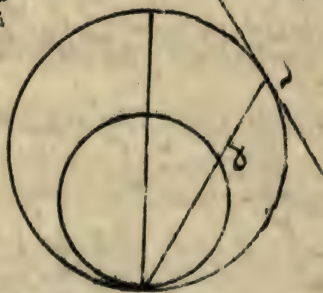
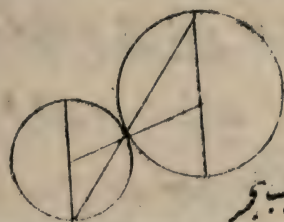
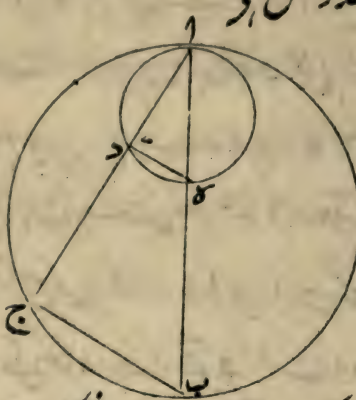
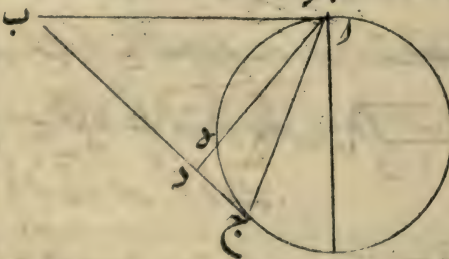
حد ۱۱۹ اور ۱۲۰ کی مدد سے سطح راس مین خط بطی النزول بھی بعض حالت
مین دریافت ہوسکتا ہے۔ اسکی ایک مثال نیچے لکھی جاتی ہے۔
فرض کرو کہ ب ہ ج کوئی دایرہ جسکا مرکز ط ہے اور ا ایک نقطہ
ہے جو کہ دایرہ کے نقطہ راس سے اوپر واقع ہے تو نقطہ
ا سے دایرہ تک خط بطی النزول دریافت کرو

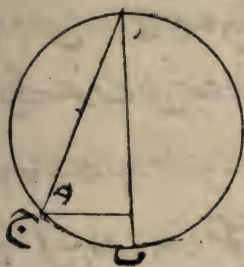
(د) کسی دایرہ کے محیط سے کسی معین نقطہ بیرونی تک خط سریع النزول دریافت کرو ٭

دایرہ کے نقطہ اعلیٰ اور نقطہ معین کو ملانے سے جو خط پیدا ہوتا ہی اُس کا جس قدر حصہ اُس دایرہ کے باہر واقع ہی وہی خط مطلوب ہوگا یہ بھی ۱۱۸ ح کے بموجب ثابت ہو سکتا ہی ٭

(ہ) کسی دایرہ کے اندرونی نقطہ معین ا سے اُس دایرہ کے محیط تک خط سریع النزول دریافت کرو ٭

ایک ایسا دایرہ کھینچو جس کا نقطہ اعلیٰ ا ہو اور جو دایرہ معین کو کسی نقطہ ج میں مس بھی کرے یا یہ کھو کہ دایرہ معین کے نقطہ اعلیٰ ب سے نقطہ ا کو ملاؤ اور خط وصل کنندہ کو محیط دایرہ تک بڑھاؤ تو ا ج خط مطلوب ہوگا - دیکھو حد ۱۱۸

(و) کسی دایرہ کے بیرونی کسی خط سے اُس دایرہ کے محیط تک خط سریع النزول دریافت کرو ایک ایسا دایرہ کھینچو جو کہ دایرہ معین کو نقطہ اسفل ج میں اور خط معین کو کسی نقطہ د پر مس کرے فرض کرو کہ خط د ج دایرہ کو نقطہ ہ پر قطع کرتا ہی تو د ہ خط مطلوب ہوگا ٭

خط ب ج تک ایک ایسا خط کھینچو کہ جسمین ایک ذرہ وقت اقل
مین اُس خط پر پہونچ سکے ۔
ایک ایسا دایرہ کھینچو کہ جسکا نقطہ اعلی ا ہو اور جو کہ ج ب خط کو پھر کسی
نقطہ ج مین مس کرے تو ا ج خط مطلوب ہوگا کیونکہ اگر نقطہ ا سے خط
ب ج تک اور کوئی خط مثلاً ا د کھینچا جاوے تو وہ دایرہ کو کسی نقطہ
ہ پر قطع کریگا تو ا ہ پر ذرہ کے گرنیکا وقت = ا ج پر گرنیکے
وقت کے لیکن ا د پر گرنے کا وقت ا ہ پر گرنیکے وقت سے زیادہ ہے
اسلیئے ا ج پر گرنیکے وقت سے بھی زیادہ ہے اور اسی طرح ثابت ہو سکتا ہی
کہ اگر نقطہ ا سے خط ج ب تک کوئی اور خط کھینچا جاوے تو اُسپر ذرہ
کے گرنیکا وقت ا ج پر گرنیکے وقت سے زیادہ ہوگا ۔
(ب) کسی خط معین سے کسی نقطہ معین تک خط سریع النزول دریافت کرو
ایک ایسا دایرہ کھینچو کہ جسکا نقطہ اسفل نقطہ معین ہو اور جو خط معین کو بھی
مس کرے تو نقطہ تماس اور نقطہ معین کے ملانے سے جو خط بنتا ہے
وہی خط مطلوب ہوگا اِس کا ثبوت حد ۱۱۸ کے بموجب ہی ۔
(ج) کسی دایرہ کے نقطہ بیرونی سے اُس دایرہ تک خط سریع النزول
دریافت کرو نقطہ معین اور دایرہ کے نقطہ اسفل کو وصل کرو تو جو خط
کہ ان نقاط کے ملانے سے پیدا ہوگا
اُسکا جسقدر حصہ دایرہ سے باہر
واقع ہو وہی خط مطلوب ہوگا ثبوت حد ۱۱۸ کے بموجب ہی

اسیطرح ثابت ہوسکتا ہے کہ دایرہ کے نقطہ اسفل سے گذرتی ہوئے
قطر پر کسی شی کا وقت حرکت مقدار مستقل ہی

(۱۱۹) جب سطح راس مین
دو دایرہ نقطہ اعلی مین اندر
کی طرف مس کرین تو اس نقطہ
سے گذرتی ہوئی کسی وتر کے
اس حصہ پر جو ہر دو دایرہ کے
درمیان ہے گرنیوالی شئ کا وقت حرکت مستقل ہوتا ہے شکل مندرجہ
حد بالا سے معلوم ہوگا کہ شی کا وقت حرکت دج پر = وقت حرکت اج پر
وقت حرکت اد پر = وقت حرکت اب پر - وقت حرکت اہ پر
= وقت حرکت ہ ب پر جو کہ ایک مقدار مستقل ہی *
اسی طرح ثابت ہوسکتا ہی کہ نقطہ اسفل سے گذرتی ہوئی کسی وتر کے اس حصہ
پر جو دایرون کے درمیان واقع ہے شئے کے گرنیکا وقت مستقل ہی *
(۱۲۰) دعوی متذکرہ بالا کی مدد سے سطح راس مین شی کا خط سریع النزول
بعض حالتون مین دریافت ہوسکتا ہی اسکی کئی ایک مثالین ذیل مین
درج ہین *

(۱) کسی سطح راس مین
کوئی نقطہ ا اور کوئی ایک
خط ب ج ہے نقطہ ا سے

سطح مایل پر پھسلتی ہے جبکہ وہ نقطہ ا پر آئیگی تو اُس لحظہ مین اُسکی سرعت
محصلہ = $\sqrt{\text{۲ ق جب ه × و ء}}$ = $\sqrt{\text{۲ ق ء ل}}$ لیکن اگر وہ شے نقطہ ء سے
خط سمت الراس مین گرتی تو مقام ل پر اُسکی سرعت محصلہ یہی ہوتی
(دیکھو حد ۳۲) پس اِس سے ظاہر ہوتا ہی کہ سطح مایل کے راس سے کسی
پھسلتی والی شے کی کسی مقام تک آنے مین وہی سرعت محصلہ ہوتی
ہے جو راس سے سمت الراس مین گرکر سطح افقی تک پھونچنے مین حاصل ہوتی
ہی جوکہ اُس مقام سے گذرتی ہی

(۱۱۸) سطح راس کے کسی دایرہ کے نقطہ اعلی سے کسی وترمین گذرنی والی شئے کا وقت حرکت مستقل ہوتا ہی
اور اُسکی قطر راس کے گرنےمین جو وقت صرف ہوتا ہے اُسکے مساوی ہوتا ہے
فرض کرو کہ اب دایرہ کا قطر سمت الراس ہی اور اج کوئی وتر ہے جسکی
سطح افقی سے میلان ه ہے اِس وترمین شئے کی حرکت ویسی
ہوتی ہے جیسی کہ سطح مایل مین اِسلئے اج کی طرف اُس کا اسراع
= ق جب ه لیکن چونکہ زاویہ اج ب قایمہ ہے اِسلئے زاویہ
اب ج = ه اور بموجب حد ۱۱۵ وتر اج پر شئے کے گرنیکا وقت =

$$\sqrt{\frac{\text{۲ اج}}{\text{ق جب ه}}} = \sqrt{\frac{\text{۲ اج}}{\text{ق}\cdot\frac{\text{اج}}{\text{اب}}}} = \sqrt{\frac{\text{۲ اب}}{\text{ق}}}$$

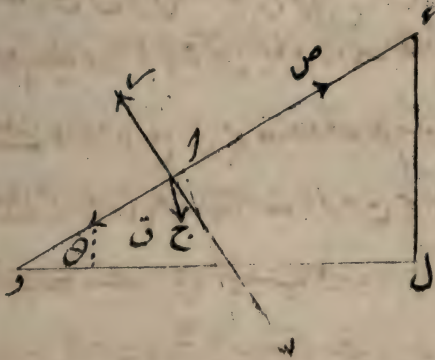
= قطر اب پر شئے کی گرنیکے وقت۔ جوکہ ایک مقدار مستقل ہے

کے خط عمودی مین منفصل کیا جاے تو معلوم ہوگا کہ ع ا کی سمت مین جزو
منفصلہ سطح مایل پر شئے کی حرکت مین کچھ اثر پیدا نہین کرتا بلکہ سطح کی
فعل انفعالی سے زایل ہو جاتا ہے اور خط ا و کی سمت کا جزو منفصلہ یعنی
ج ق × جب ہ اسراع پیدا کرتا ہے اسلئے اگر سطح بالکل ہموار ہو
تو ا و کی سمت مین شئے کا اسراع = ہے ق × جب ہ اس سے
ظاہر ہوتا ہے کہ سطح مایل پر کسی ذرہ کی حرکت کے دریافت کرنیکے لئے باب سیوم
کی حدود مین اسراع یکسان کی بابت جو قاعدے ثابت کئے گئے ہین وہی عمل
مین آئینگے - صرف ان حدود مین اسراع کی علامت کی جگہ ق جب ہ
کو رکھنا چاہئے *
اگر سطح مایل ہموار نہ ہو تو اسکی تحکیک (ط) شئے کی حرکت کے برخلاف
سمت مین عمل کریگی اور اگر سطح کی استقامت مساوی ص کے ہو تو تجربہ سے
معلوم ہے کہ ط = لا ص جہانکہ لا ایک مقدار مستقل ہے
اسلئے ط = لا ج ق جم ہ (دیکھو علم سکون)
اسلئے اگر شئے کی حرکت سمت آ د مین ہو تو اس پر اسراع پیدا کرنیوالی
طاقت = ہے ج ق جب ہ - لا ج ق جم ہ
اور اس طاقت سے جو اسراع پیدا ہوتا ہے وہ = ق (جب ہ - لا جم ہ)
اگر سمت حرکت آ د ہو تو شئے کا اسراع = ق (جب ہ + لا جم ہ)
واضح ہو کہ اس اسراع کی قیمت ہر حالت مین ق سے کم ہے
(۱۱۷) فرض کرو کہ کوئی شئے نقطہ د سے حالت سکون سے شروع کر

بارہوان باب

سطح مائل پر حرکت کے بیان مین

(۱۱۵) تعریف ۔ جب کوئی سطح سطح افقی سے کوئی زاویہ بنائے تو اسے سطح مائل کہتے ہین اور جو زاویہ یہ اوس سے بناتی ہے اسے سطح مائل کا میلان کہتے ہین

(۱۱۶) یہ ظاہر ہے کہ جب کسی سطح مائل پر کوئی شئے بسبب کشش ثقل کے متحرک ہے تو اسکی حرکت اُس سطح کی راس مین ہوگی جو کہ سطح مائل اور سطح افقی ہردو پر عمود ہو اس شکل مین $\overline{دا}$ سطح مائل پہ شئے کا خط تحریک ہے $\overline{دل}$ سطح زمین ہے اور $\overline{ال}$ سطح مائل کی بلندی ہے اور θ اوسکا میلان

مقام ا پر کسی جسم ج پر کشش ثقل یعنے اُسکا وزن $\overline{جق}$ نیچلی طرف عمل کر رہا ہے ۔ اگر اس طاقت کو خط دا اور سطح

گھونمنے مین کتنا وقت صرف ہوگا   جواب ۴ π √(ا/۲) سکنڈ

(۱۴) کسی رسّی کے ہر دو سرونسے جدا گانہ ج اور ج دو جسمونکو باندہ کر سطح مستوی پر اسطرح گھمایا گیا ہے کہ وہ دونو جسم دو دائرون مین متحرک ہین اوس رسّی کا کونسا نقطہ حالت سکون مین ہوگا

جواب اجسام کا مرکز ثقل

(۱۵) پ پونڈ جسم کو ایک ل فٹ لنبی رسّی کے ایک سرے مین باندہ کر اُسکے دوسرے سرے کو قائم رکھکر سطح افقی پر یکسان گھمایا جاتا ہے وہ رسّی صرف جَ پونڈ وزن سہار سکتی ہے تو دریافت کرو کہ جسم ج کی سرعت کہانتک زیادہ سے زیادہ ہوسکتی ہے جس سے رسّی ٹوٹ نجائے

جواب √(جَ ل / ج)

مین اسکا کتنا وقت صرف ہوگا اور اسکے انجام مین اسکی سرعت محصلہ کیا ہوگی -
جواب اول $\frac{۲۱}{۲ق}$ دوم $\frac{۱۴}{\frac{۲}{۳}ق}$

(۹) دریافت کرو کہ ایک اونس کی طاقت ایک پونڈ کے جسم پر عمل کرکے آدہے سکنڈ مین کتنا فاصلہ طے کرائیگی

جواب ۳ انچ

(۱۰) کسی سطح پر ایک ۸ پونڈ کا جسم رکہکر اُس سطح کو فی سکنڈ ۱۲ فٹ کے اسراع کے حساب سے سمت الراس مین اٹہایا جاتا ہے تو اُس سطح پر شئے کا دباؤ دریافت کرو

جواب ۸ (۱۲ + ق)

(۱۱) اگر دو فٹ فاصلہ اکاہی فاصلہ ہو اور اکاے جسم کا وزن اکائی وزن ہو تو مساوات ن = ج ق مین اکائی وقت کیا ہونا چاہیے
جواب $\frac{۱}{۴}$ ایک سکنڈ کا

(۱۲) کسی جسم کو ایسے ایک دائرہ مین جسکا نصف قطر ۵ فٹ ہے اسطرح یکسان طور پر گہمایا جاتا ہے کہ وہ ۵ سکنڈ مین ایک مرتبہ گہوم آتا ہے تو طاقت ہاربہ اسپر کیا ہوگی

جواب $\frac{۴}{۵}\pi^2$

(۱۳) ایک پونڈ جسم دو گز لنبی رسّی کے ایک سرے سے باندہ کر اور دوسرے کو قائم رکہکر سطح افقیے مین گہمایا جاتا ہے اسّی کی کشش ۳ پونڈ وزن کے برابر ہے دریافت کرو کہ جسم کے ایک دفعہ

وزن کچھ نہوتا۔

(۴) ایک ریل گاڑی جسکا جسم ۷۰۲۱ ٹن ہے ایک ایسے دائرہ مین فی گھنٹہ ۳۰ میل کی سرعت سے متحرک ہی جسکا نصف قطر ۴۶۰ گز ہے طاقت کشش ثقل کو اکائی فرض کرکے ماپنے سے اُسکی قوت نار یہ کسقدر ہوگی

جواب ۱۴۴۰۷ ٹن

(۵) سطح مستوی پر ایک ۱۰ پونڈ کے وزن دار شئے کو رکھکر نیچے کیطرف سرعت ۱۰ ؁ سے متحرک کیا گیا تو دریافت کرو کہ اوس سطح پر جسم کا دباؤ کسقدر ہوگا

جواب ۱۰ ۳۲ (ق - ۱۰)

(۶) کسی شئے پر ۴۰ ق کے مقدار کی طاقت عمل کرکے ۲ سکینڈ مین اوسکو سمت الراس مین ۲ فٹ تک اٹھاتی ہی تو اُس شئے کا جسم دریافت کرو جواب $\frac{۴۰ ق}{ق + ۱}$ پونڈ

(۷) کوئی طاقت کسی ن پونڈ وزن کے جسم پر ایک سکنڈ عمل کرکے فی سکنڈ ف فٹ کے حساب سرعت پیدا کرتی ہے تو دریافت کرو کہ وہ طاقت کتنا وزن سہار سکتی ہے

جواب $\frac{ن ف}{ق}$

(۸) کوئی ایک طاقت جو کہ چار پونڈ وزن سہار سکتی ہے سطح افقی ہموار پر ن پونڈ جسم کو کھینچ رہی ہے تو ۹ ۳ فٹ کھینچے

بخوبی معلوم ہوسکتا ہے اور اسی فرق کے مشاہدہ سے عالمون نے زمین کی گردش محوری اور مختلف عرضون مین اوسکے نصف قطر کے اختلاف کی پوری پوری تحقیق کی ہے

مثالات درباب قوانین حرکت و کشش ثقل

(۱) اگر ایک فٹ اکائی فاصلہ فرض کیا جاوے اور اکائی جسم کے وزن کو اکائی طاقت فرض کیا جاوے تو اکائی وقت دریافت کرو

جواب $\frac{1}{\sqrt{32}}$

(۲) کوئی جسم جسکا وزن ایکہزار پونڈ ہے ایسی ایک رسّی سے بندہا ہوا ہے جسکی لنبائی سو فٹ ہے اور جو کہ چارسو پچاس پونڈ وزن تک سہار سکتی ہے اگر رسّی کا ایک سرا قائم رکھکر ایک دائرہ مین سرعت یکسان سے گہمایا جاوے تو دریافت کرو کہ کسقدر سرعت کے ساتھہ گہمانے سے وہ رسّی ٹوٹ جائیگی

جواب ۳۸٫۰۶

(۳) خط استوایہ کشش ثقل ۳۲٫۲ ہے ثابت کرو کہ اگر زمین ۲۴ گہنٹہ مین قریبًا ۱۷ دفعہ گردش کرتی تو خط استوایہ شئ کا ظاہری

∴ ص - صَ = ج مہ ک^{2} جم^{2} θ

اس مساوات سے صاف ظاہر ہے کہ کسی شئے کے اصلی وزن اور ظاہری وزن کا فرق اُسکے مقام کے عرض پر منحصر ہے اور عرض زیادہ ہونے سے یہ فرق کم ہوتا ہے اور کم ہونے سے زیادہ
خط استوا پر θ = ۰ اسلئے یہ فرق وہان سب سے زیادہ ہے اور قطبین میں θ = ۹۰ اسلئے یہان یہ فرق سب سے کم ہے

(۱۱۳) چونکہ خط استوا پر θ = ۰ اسلئے وہان ج ق - ج قَ = ج مہ ک^{2}
یعنے ق - قَ = مہ ک^{2}
لیکن مہ = ۴۰۰۰ میل کے اور ک = $\frac{۲π}{۶۰ × ۶۰ × ۲۴}$ فی سکنڈ مین
∴ خط استوا پر ق - قَ = ء۱۱۱۶ قریباً
لیکن تجربہ سے معلوم ہے کہ خط استوا پر قَ یعنے کشش ثقل ظاہری کسی شئے پر = ۳۲ء۰۹ ∴ وہان اصلی کشش ق = ۳۲ء۲ قریباً

(۱۱۴) زمین کے نصف قطر کے اختلاف اور گردش محوری کے سبب سے مختلف عرضون پر شئے کا وزن ظاہری مختلف ہوتا ہے مگر اصلی وزن اور ظاہری وزن کا فرق ہر جگہ نہایت کم ہوتا ہے واضح ہو کہ اگر یہ فرق زیادہ بھی ہوتا تو عام ترازو یا کانٹے مین یہ فرق دریافت نہین ہو سکتا - کیونکہ ہر دو پلّو کے اشیاء پر سبب مذکورہ ایک ہی طرح عمل کرکے اُنکے وزن ظاہری مین ایک ہی قسم کا فرق پیدا کرتا ہے مگر یہ فرق بذریعہ شاقول یا کمانی دار ترازو کے

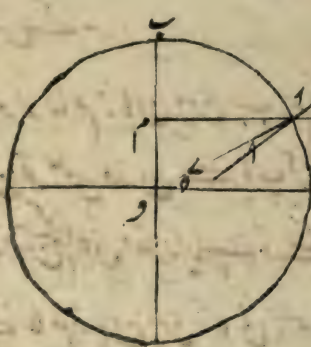
= ج × ام × کہا = ج س × کہا جم θ

اب واضح ہو کہ مقام ا کی سطح پر شئے مذکورہ کا جو دباؤ ہے عام زبان بیز اوسکا وزن کہلاتا ہے اگر زمین کی گردش محوری نہوتی تو یہ دباو کشش ثقل کے مساوی ہوتا مگر سمت ا د مین طاقت ہاربہ کے سبب یہ دباؤ شئے پر کشش ثقل کے مساوی نہین ہے۔ شئے پر کشش ثقل کی مقدار کو ہم اوسکا اصلی وزن کہین گے اور مقام ا کی سطح پر شئے کی دباو کو ہم اسکا ظاہری وزن کہین گے

فرض کرو کہ شئے کا اصلی وزن ص ہے اور شئے پر اک کی سمت مین زمین کا فعل انفعالی یعنی اسکا ظاہری وزن صَ ہے اگر مقام ا پر اصلی کشش ثقل کا مقدار ق ہو اور ظاہری کشش ثقل کا مقدار قَ ہو تو ص = ج ق اور صَ = ج قَ - او اور اک خطوط کے تقاطع سے جو زاویہ بنتا ہے اوسکو φ فرض کرو تو ظاہر ہے کہ مقام ا پر جسم ج تینون طاقتون سے جو اوَ اکَ اور ا د کی سمتون مین عمل کرتی ہین حالت سکون مین ہے اسئے اگر ہم خط ا د اور اوسکے خط عمودی مین اون طاقتون کو منفصل کرین تو بموجب شرائط سکون مذکورہ جر ثقیل

ص - صَ جم φ - ج س کہا جم θ = ۰

مگر φ کی قیمت نہایت کم ہے کیونکہ طاقت ہاربہ بہ نسبت کشش ثقل کے نہائت کم ہے اسلئے جم φ = ا (قریباً)

علم ہیئت مین یہ ثابت ہو چکا ہے کہ زمین اپنے محور پر یکسان طور پر گردش
کرتی ہے یعنے ۲۴ گھنٹہ مین ایک دفعہ گھوم آتی ہے اسلئے زمین کے
اوپر ہر ایک شئے بھی ۲۴ گھنٹہ مین ایکدفعہ اپنے عرض پر گردش یکسان
کرتی ہے اور مختلف عرضون مین اُسکی سرعت گردش مختلف ہوتے
ہے

فرض کرو کہ زمین بالکل گول
ہے اور اسکا نصف قطر ر ہے
اور محور پر سرعت الزاویہ (ک)
سے گردش کرتی ہے مقام آ پر
جسکا عرض ہ ہے کوئی ایک
جسم ج واقع ہے جو کہ بسبب
گردش محوری کے ۲۴ گھنٹہ مین یکسان حرکت کرکے ایسا ایک دائرہ
بناتا ہے جسکا نصف قطر م آ ہے اور ا م = ر جم ہ

حد ۸۸ مین بیان کیا گیا ہے کہ جب کوئی شئے دائرہ مین گردش کرتی ہے تو
اسمین ایک اسراع دائرہ کے مرکز کیطرف ہوتا ہے اور اسلئے اس
شئے کو دائرہ پر رکھنے کے لئے مخالف سمت مین ایک مساوی طاقت
کی ضرورت ہوتی ہے جسے قوت نا ربہ کہتے ہین یہان اُمس
سطح زمین کی استقامت جسپر کہ وہ شئے رکھی ہی بجائے طاقت نا ربہ
کے ہے چنانچہ سمت آد مین اس طاقت کی منقسمہ ا ر

کہتے ہین اور اُس جسم کا وزن بہی ایک پونڈ کہلاتا ہے
بحث مذکورہ بالا سے علمی اکائی طاقت یا وزن کی نسبت کسی خاص ملک کی مقررہ اکائی وزن کے ساتھ معلوم ہوتے ہے۔ مثلاً ہندوستان مین علمی اکائی طاقت = $\frac{\text{ایک سیر وزن}}{\text{ق}}$ = قریباً آدہ چہٹانک وزن کے اور انگلنڈ مین علمی اکائی طاقت = $\frac{\text{ایک پونڈ وزن}}{\text{ق}}$ = آدہ اونس کے۔

واضح ہو کہ عام زبان مین جب ہم ایک پونڈ کسی شئے کے وزن کو کہتے ہاین تو علمی وزن سے ماپ کر اُسے ایک پونڈ نہین کہتے ہین کیونکہ حاکم نے جس جسم کو اکائی مقرر کیا ہے اُسکے وزن کو بھی ایک پونڈ مقرر کیا ہے یعنے عام زبان مین اکائی جسم بھی کا وزن اکائی وزن ہے اسطرح عام زبان مین جب ہم کہتے ہین کہ کسی شئے کا وزن ۵ پونڈ ہے تو اُسکا جسم بھی اکائی جسم سے ۵ گنا ہے یعنے عام زبان مین جو مقدار وزن کو تعبیر کرتا ہے وہی اُسکے جسم کو بھی تعبیر کرتا ہے مگر اسیکو اگر ہم علمی اکائی وزن سے ماپتے تو مقدار ق اُسکے ہر ایک اکائی جسم کے وزن کو تعبیر کرتا

(۱۱۲) یہ ذکر ہو چکا ہے کہ زمین کے مختلف عرضون مین نصف قطر کے اختلاف سے کشش ثقل کی قیمت مختلف ہوتی ہے

علاوہ ازین زمین کی گردش محوری بہی اس اختلاف کا ایک بڑا سبب ہے۔ اس کا کچھ مختصر بیان کرکے ہم اس باب کو تمام کرینگے۔

اکائی وزن اکائی جسم پر کشش ثقل کا ق حصہ ہے اسکی زیادہ تفصیل نیچے مذکور ہے

علمی اکائی طاقت وہ طاقت ہی جو کہ اکائی جسم پر عمل کرکر اکائی اسراع پیدا کرتی ہے مثلاً اگر ایک سکنڈ اکائی وقت اور ایک فٹ اکائی فاصلہ ہو تو ظاہر ہے کہ اکائی جسم پر کشش ثقل علمی اکائی طاقت کا قریب ۳۲ گنا ہے کیونکہ وہ ۳۲ اکائیں اسراع اسمین پیدا کرتی ہے اس سبب سے اکائی جسم کا وزن علمی اکائی طاقت کا ۳۲ گنا ہے مگر جسم ج کا وزن برابر ہے ج گنا اکائی جسم کے وزن کے یعنے برابر ہے ج × ۳۲ × علمی اکائی وزن کے یعنے علمی اکائی وزن کے ساتھ ماپنے سے جسم ج کا وزن عدد ج ق سے تعبیر ہوگا

(۱۱۱) چونکہ علمی اکائی طاقت برابر ہے $\frac{\text{اکائی جسم کا وزن}}{\text{ق}}$ اسلئے اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ اکائی جسم کو مختلف لینے سے علمی اکائی طاقت بھی مختلف ہو جائیگی

واضح ہو کہ بادشاہ ہر ایک ملک مین اکائی جسم کو مقرر کر دیتا ہے تا کہ ہر ایک شخص کے اپنی اپنی راے سے مختلف اکائی جسم فرض کرنے سے خرید و فروخت مین قباحت پیدا نہو۔ مثلاً ہندوستان مین ایسا ایک جسم اکائی فرض کر لیا جاتا ہے جسکو سیر کہتے ہین اور بنظر سہولت اس جسم کے وزن کو بھی سیر کہتے ہین

اور انگلنڈ مین ایسا ایک جسم اکائی فرض کیا جاتا ہے جسکو ایک پونڈ

زیادہ ہے۔ اسلئے مختلف عرضون مین کشش ثقل بھی مختلف ہوتی
ہے مگر چونکہ ان ہر دو نصف قطر کا تفاوت بہت کم ہے اسلئے مختلف
عرض مین کشش ثقل کی قیمتون مین بہت فرق نہین ہوتا ہے تجربہ سے
دریافت ہوا ہے کہ خط استواء پر اسراع کشش ثقل مساوی ۳۲٫۰۸
فٹ فی سکنڈ ہی اور قطب پر ۳۲٫۲۵ اور انگلنڈ مین ۳۲٫۱۹ اور علی ہذا القیاس
لیکن جہان بہت دقیق نتیجہ درکار نہین ہوتا وہان اسکی قیمت ۳۲٫۲ یا صرف
۳۲ فرض کرنے سے مطلب حاصل ہوجاتا ہے

(۱۱۰) اس سے پہلے ذکر کیا گیا ہے کہ کشش ثقل ہی شے کے وزن کا
باعث ہے جب کوئی شئے سطح مستوی پر رکھی جائے تو اس سطح پر اُسکا
دباؤ طاقت کشش ثقل کے مساوی ہے اور اس دباؤ کی مقدار کو ہم
شئے کا وزن کہتے ہین چنانچہ کسی شئے پر جتنا کشش ثقل کا مقدار ہے
وہی اُسکے وزن کا مقدار بھی ہے مثلاً اگر جسم جَ کا وزن نَ ہو
تو اُسکے یہ معنی ہین کہ نَ مقدار کی طاقت جَ مقدار کی جسم پر عمل
کرکے اُس جسم مین اسراع ق پیدا کرنیکے قابل ہے

∴ ن = ج ق × علمی اکائی طاقت (دیکھو حد ۸۰)

یعنی علمی اکائی طاقت کے ساتھ ناپنے سے جَ جسم پر کشش ثقل (یعنی
جسم کے وزن کا مقدار) عدد ج × ق سے تعبیر ہوتی ہے۔ جب کسی
شئے کا وزن دریافت کرنیکے لئے مساوات بالا استعمل ہوتی ہے
تب اکائی طاقت علمی کو اکائی وزن کہتے ہین اور ظاہر ہے کہ یہ

مختلف ذریعون سے معلوم ہوسکتا ہے اونمین سے شاقول اور آلہ
ایٹ وڈ صاحب کا اس مطلب کے لئے بہت مفید ہین - ان آلونکا
بیان آگے کیا جائیگا - کشش ثقل سے اسراع پیدا شدہ کو ہم ہمیشہ
ق سے تعبیر کرینگے

(۱۰۸) زمین جسم کے ہر ایک ذرہ کو اپنے مرکز کیطرف کشش کرتی
ہے مگر چونکہ اکثر اجسام کا حجم کم ہوتا ہے اسلیئے اوسکے کسی دو
ذرون کا درمیانی فاصلہ بہ نسبت مرکز زمین کے فاصلہ کی انسے بہت کم
ہوتا ہے اسلیئے شئے کے ہر ذرہ پر کشش ثقل قریباً سمت متوازی
مین ہوتی ہے اور اسلیئے جسم پر حاصل کشش سب ذرونکی کششونکے
مجموعہ کے برابر ہوتی ہے مثلاً اگر ایک ذرہ پر کشش ثقل ط ہو تو
شئے کے دس ذرونپر کشش ثقل ط کا دس گنا ہوگا اور اسطرح
بھی ظاہر ہے کہ ہر ایک شے پر کشش ثقل کی مقدار اسکے جسم کے
متناسب ہوتی ہے

(۱۰۹) علم ہیئت مین یہ بات ثابت ہو چکی ہے کہ زمین بالکل گول
نہین ہے بلکہ نارنگی کیطرح دونو قطبون مین کسیقدر دبی ہوئی
ہے پس خط استوا مین اسکا نصف قطر اطول ہے اور خط استوا کے
جنوب یا شمال کیطرف رفتہ رفتہ نصف قطر کم ہوتا جاتا ہے حتے کہ
قطبین پر سب سے کم ہے حکیمون نے یہ بھی دریافت کیا ہی کہ خط
استوا پر کا نصف قطر قطب کے نصف قطر سے قریب ۱۳ میل کے

ہونے سے زیادہ اور کم ہونے سے کم ہوتا ہے

(١٠٦) حرکت کے قانون سوم سے ظاہر ہے کہ زمین جس طاقت سے کسی شئے پر کشش کرتی ہے وہ شئے بھی زمین کو طاقت مساوی سے اپنی طرف کھینچتے ہے

فرض کرو کہ اس کشش باہمی کے سبب سے شئے مجبور ہو کر مرکز زمین کیطرف اسراع ع سے متحرک ہے اور مرکز زمین بھی اوس شئے کیطرف اسراع عَ سے متحرک ہے تو

$$\text{ع} = \frac{\text{ک}}{\text{ج}} = \frac{\text{م جَ}}{\text{ر}^2}$$ اور علی ہذا القیاس

$$\text{عَ} = \frac{\text{ک}}{\text{جَ}} = \frac{\text{م ج}}{\text{ر}^2}$$ (دیکھو حد ٨٠)

اسلئے مرکز زمین کیطرف اس شئے کا اسراع منتسب (یعنے اگر زمین ساکن رہے اور وہ شئے صرف مرکز زمین کیطرف چلتی تو اوسکا اسراع)

$$= \text{ع} + \text{عَ} = \frac{\text{م} \times (\text{ج} + \text{جَ})}{\text{ر}^2}$$

واضح ہو کہ زمین پر اگر کسی شئے کا خیال کیا جاے تو معلوم ہوگا کہ بہ نسبت جسم زمین کے اس شئے کا جسم بہت صغیر ہے اسلیے (ج + جَ) قریباً جَ کے مساوی ہے اسلئے مرکز زمین کیطرف ہر شئے کا اسراع $= \frac{\text{م جَ}}{\text{ر}^2}$ جو کہ مقدار مستقل ہے حد (١٠٢) مین جو تجربہ کا بیان کیا گیا ہے یعنے ہر شئے ایک ہی اسراع سے نیچے گرتی ہے اسکا سبب یہی ہے

(١٠٧) کشش ثقل سے گرنیوالی شئے کا اسراع مرکز زمین کیطرف

ہے کہ کسی گول شئی کی کشش کسی بیرونی شئے پر اوسیقدر ہوتی ہے جسقدر کہ وہ کشش کرنیوالی شئے مجتمع ہوکر اپنے مرکز مین ایک ذرہ کے طرح موجود ہونے سے ہوتی اسلئے بیرونی شئے پر زمین کی کشش اسیقدر ہے جیسے کہ تمام زمین اپنی مرکز پر ایک ذرہ کیطرح موجود ہونے سے ہوتی اور اسلئے اس کشش کو کشش مرکز زمین یا کشش ثقل کہتے ہین

فرض کرو کہ زمین کا جسم جَ ہے اور اسکا نصف قطر ر جو قریب مساوی ۴۰۰۰ میل کے ہے اور کسی بیرونی شئے مجرد ب کا جسم ج ہے اور زمین سے اُسکی بلندی د ہے تو اگر ک اونکی باہمی کشش کو تعبیر کرے تو قانون مذکورہ بالا کے بموجب ک $\propto \frac{ج\,جَ}{(ر+د)^2}$

یعنے ک $= \frac{م \times ج\,جَ}{(ر+د)^2}$ جہان م مقدار مستقل ہے

(۱۰۵) واضح ہو کہ د کا مقدار بہ نسبت ر کے نہایت کم ہے کیونکہ بڑے بلند پہاڑ کی چوٹی بھی ۵ یا ۶ میل سے مرتفع نہین ہوتی اسلئے مساوات مذکورہ بالا سے ثابت ہوتا ہے کہ ج جسم پر زمین کی کشش ثقل

ک $= \frac{م\,ج\,جَ}{ر^2}$ تقریباً

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ ک کی قیمت شئے مجرد ب کے جسم کے متناسب ہے کیونکہ جَ اور ر مقادیر مستقل ہین۔

چونکہ شئے پر کشش ثقل کے مقدار کو اُسکا وزن کہتے ہین اسلئے ثابت ہوا کہ کسی شئے کا وزن اُسکے جسم کے متناسب ہے یعنی جسم کے زیادہ

کی کمی بیشی سے اس اسراع کی قیمت مین کمی بیشی واقع نہین ہوتی۔ مثلاً اگر کوئی لوہے کا گیند اور کوئی پر کبوتر ایک ہی لحظہ مین ایک ہی بلندی پر سے گرایا جاوے تو دونو ایک لحظہ مین زمین پر پہونچتے ہین ۔

(۱۰۳) زمین کی ہوائے محیط کی تحکیک سے تجارب مذکورہ بالا مین بہت سی اختلاف واقع ہوتے ہین مگر جب آلہ مخرج الہوا کے وسیلہ سے ہوا کو نکالا جاسے تو یہ تجربے درست ہونگے اور یہ بہی واضح ہوگا تجارب مذکورہ بالا صرف زمین پر بلندی قلیل کے لئے ہی درست ہین اور نیز شئی متحرک کے جسم صغیر کے لئے ۔ پس یہ تمام تجارب عالم کی کشش ثقل کے قانون کے خاص نتائج ہین نیوٹن صاحب نے اس قانون کو حسب ذیل مروج کیا ہے

جہانکا ہر ایک ذرہ دوسرے ذرہ کو اپنی طرف ایک خط مستقیم مین کشش کرتا ہے اور اس طاقت کشش کا مقدار ان دونو ذرون کے جسم کے حاصلضرب سے نسبت راست رکہتا ہے اور ان ہردو کے بُعد کے مجذور سے نسبت معکوس رکہتا ہے یعنے اگر ج اور جً ان دو ذرّون کے جسم کو تعبیر کرین اور ف انکا فاصلہ درمیانی ہو اور ک انکی طاقت کشش باہمی کو تعبیر کرے تو ک $\propto \frac{ج \times جً}{ف^2}$

(۱۰۴) کسی شئے پر کشش ثقل (یعنے کشش زمین) کی دریافت کے لئے اول خیال کرنا چاہئے کہ زمین گول ہے اور یہ ثابت ہوا

گیارہوان باب

کشش ثقل کا بیان

(۱۰۱) کشش ثقل دنیا مین ہر ایک جگہ اور ہر ایک شے پر عمل کر رہی ہے اور اسی کے سبب شئے اوپر سے نیچے گرتی ہے اور شے کے وزن کا سبب بھی یہی ہے - اسلئے اُس کشش کی ماہیت کا بیان کرنا یہان مناسب ہے

(۱۰۲) جب کوئی شے اوپر سے نیچے کیطرف گرتی ہے تو ایک خط مستقیم مین گرتی ہے جسے خط سمت الراس کہتے ہین - زمین کی کشش ہی اسطرح شے کے گرنے کا باعث ہے - اور جس خط مین وہ گرے ہے وہ طاقت کشش کی سمت ہے - حکماء نے بہت تجربہ سے ثابت کیا ہے کہ

(ا) ہر ایک شے زمین کے سب مقامون پر اوس مقام کے خط سمت الراس مین گرتی ہے

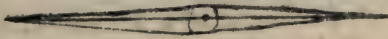
(ب) گرنے والی شئے کی حرکت اسراع مستوی سے متبدل ہوتی ہے یعنے بباعث کشش ثقل کے گرنیوالی شئے کا کسی عرصہ مین طے شدہ فاصلہ اُسوقت کے مجذور کے متناسب ہے (دیکھو حد ۲۱)

(ط) ہر ایک شئے کے لئے اسراع ایک ہی ہے یعنی شئے کے جسم

سرعت ۴ اور ۵ سے جداگانہ حرکت کرتے ہین اُنکے مرکز ثقل کی سرعت کیا ہو گی +

جواب $\frac{\sqrt{۴۱}}{۲}$

(۴۳) کوئی جسم نیچے گرتے ہوئے کسی دوسرے جسم کو جو اُسکے ساتھ رسّی سے بندھا ہوا ہے کھینچ رہا ہے ابتدا مین اونکی سرعت کچھہ نتھی کسی لحظہ معین مین اُنکے مرکز ثقل کی سرعت دریافت کرو اور ثابت کرو کہ وہ مرکز ثقل اسراع مستوی سے ایک خط مستقیم مین حرکت کر رہا ہے +

(۴۴) کسی مثلث کے ہرسہ نقاط زوایا سے تین مساوی مقدار کی جسم اضلاع مین علی الترتیب ایسے سرعت مستوی سے متحرک کیے گئے ہین جن سرعتو نکا مقدار جداگانہ اضلاع کے مقدار کے متناسب ہے ثابت کرو کہ کسی ضلع کے متوازی سمت مین اجسام کے مرکز ثقل کی سرعت کا جزو منفصلہ مساوی صفر کے ہے اور مرکز ثقل حالت سکون مین ہے +

صاحب نے اسکو سب سے پہلے ایجاد کیا تہا اسلئے یہ مساواتین اُنہین کے نام سے مشہور ہین +

(۱۰۰) حد ۸۸۸۹ ء ۹۶ سے ثابت کیا گیا ہے کہ اجسام پر بیرونی طاقت کا عمل ویسا ہی ہوتا ہی جیساکہ وہ اجسام اپنے مرکز ثقل پر موجود ہون اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ اگر کوئی بیرونی طاقت عمل نکرے یعنے جہان اجسام کے اندرونی فعل افعالی اور فعل انفعالی کے سوا اور کوئی عامل اُنپر موجود نہو تو اُس حالت مین اُنکے مرکز ثقل پر بہی کوئی طاقت عمل نہین کرتی ہے اسلئے وہ مرکز ثقل یا تو حالت سکون مین رہیگا اور اگر متحرک ہو تو سرعت مستوی سے خط مستقیم مین چلتا رہیگا (حرکت کی قانون اول پر لحاظ کرو) -

مثلاً اگر تمام نظام شمسی کے ہر ایک سیاری یعنے آفتاب مہتاب وغیرہ پر خیال کیا جاوے تو معلوم ہوگا کہ اُن سیارون کی کشش باہمی مقدار مین مساوی اور سمت مین مخالف ہے اور ان اندرونی کششون کے سوا اور کوئی بیرونی طاقت اس نظام شمسی پر عمل نہین کرتی ہے کیونکہ اس نظام شمسی کے بہت فاصلہ پر جو کواکب ہین اُنکی کشش بسبب نہایت بُعد کے کچہ نہین ہو سکتی - پس اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ نظام شمسی کا مرکز ثقل جو کہ آفتاب کے اندر واقع ہے یا تو حالت سکون مین ہے اور اگر متحرک ہی تو ایک خط مستقیم مین سرعت یکسان سے حرکت کرتا ہوگا +

امثلہ متعلق باب نمبر ۱۰

(۱) ۴ پونڈ اور ۸ پونڈ کے مقدار کے دو اشیا جداگانہ ۸ فٹ اور ۲ فٹ فی سکنڈ کی سرعت سے ایک خط مستقیم مین متحرک ہین اُنکے مرکز ثقل کی حرکت دریافت کرو +

جواب ۴

(۲) دو مساوی مقدار کے اجسام ایک ہی مقام سے دو خطوط مستقیم علی القوائم مین،

سے ظاہر ہے کہ جسم کے اندرونی ذرون کے فعل فعالی اور فعل انفعالی مقدار مین مساوی اور سمت مین مخالف ہین اسلئے یہ باہمی عمل بیرونی طاقت کے نتیجہ پر کچھ اثر نہین کرتا ہے اسلئے جب بیرونی طاقت یا طاقتون کے عمل سے کسی جسم کی حرکت کا حال کسی نقطہ معین مین دریافت کرنا ضرور ہوتا ہے تو ہم فرض کر سکتے ہین کہ کسی سمت مین اُس طاقت بیرونی کا جزو منفصلہ اُسی سمت مین جسم مذکورہ کی قوت اسراع پیدا شدہ کے متناسب ہے یعنے اگر کوئی طاقت جو کہ قوت اسراع کے جزو مذکورہ کے پیدا کرنے کے لئے کافی ہو سمت مخالف مین جسم پر لگایا جائے تو جسم کی حرکت کی جزو منفصلہ اُس سمت مین زائل ہو جائیگی علامت جبریہ سے یہ نتیجہ حسب ذیل بیان کیا جاتا ہے +

فرض کرو کہ کسی لحظہ مین محور و لَ اور و عَ کے متوازی سمت مین بیرونی طاقت عاملہ (یا طاقتہاے عاملہ کے حاصل) کے اجزاء منفصلہ جداگانہ طَ اور طِ ہے اور اُنسے اسراعہاے پیدا شدہ کی اجزاء منفصلہ عَل اور عِ سے تعبیر مین تو اُس لحظہ مین جسم کی حرکت کو دریافت کرنے کے لئے حسب ذیل مساوات کافی ہین ۔

یعنے طس ـ ج عَل = صفر

اور طِ ـ ج عِ = صفر

اگر جسم ایک سے زیادہ ہون تو مساوات بالا اُنکے مرکز ثقل کے دریافت کرنے کے لئے مفید ہونگی مگر اُس حالت مین جَ کو اجسام کا مجموعہ ماننا چاہیئے +

(۹۹) مساوات مذکورہ بالا جنسے کہ جسم کی حرکت پوری پوری دریافت ہوتی ہے حرکت کے تیسرے قانون کے ذریعہ سے ثابت کی گئی ہے لیکن ڈیم بارٹ

اور س وقت کے بعد اُسکا فاصلہ لَ

$$= \frac{ج_1 (م_1 + \frac{1}{2} ع_1 س^2) + ج_2 (م_2 + \frac{1}{2} عَ_2 س^2)}{ج_1 + ج_2}$$

اسلئے وقت س مین محور د ل کے متوازی سمت مین مرکز ثقل کا فاصلہ طے شدہ =

$$لَ - ل = \frac{1}{2} \times \frac{ج_1 ع_1 + ج_2 عَ}{ج_1 + ج_2} \times س^2$$

اس مساوات سے ثابت ہوتا ہے کہ اگر محور د ل کے متوازی سمت مین مرکز ثقل کے اسراع کا جزو منفصلہ $ع_ل$ سے تعبیر ہو تو $ع_ل = \frac{ج_1 ع_1 + ج_2 عَ_2}{ج_1 + ج_2}$

مگر $ج_1 \times ع_1$ وغیرہ محور د ل کے متوازی سمت مین اجسام کی قوت اسراع کی اجزاء منفصلہ مین اسلئے یہ ثابت ہوتا ہے کہ کسی محور مین اجسام کے قوت اسراع کی اجزو منفصلہ کا حاصل جمع اُسیقدر ہے جیسا کہ اُن تمام اجسام کے باہم ہو کر مرکز ثقل پر ذرہ کی طرح موجود ہونے سے پیدا ہوتا - دو سے زیادہ اجسام لے لئے بھی یہی بیان راست آسکتا ہے +

(۹۷) واضح ہو کہ جسم ذرون کا مجموعہ ہے اسلئے کسی ایک جسم کے ہر ایک ذرہ کو علیحدہ علیحدہ جسم فرض کر کے مساوات متذکرہ بالا سے اُنکے مرکز ثقل کی حرکت دریافت ہو سکتی ہے +

(۹۸) جب کسی متحرک جسم پر کوئی طاقت بیرونی یا طاقتہاے بیرونی کا حاصل عمل کرتا ہے تو ہم نے دیکھا ہے کہ اُسکے نتیجہ مین اسراع پیدا ہوتا ہے کہ جسکا مقدار اُس طاقت کے مقدار کے متناسب ہے کیونکہ حرکت کے تیسرے قانون

(دیکھو حد ۴۵)

(۹۵) دو اجسام کے لئے جو بحث کی گئی ہے وہی دو سے زیادہ کے لئے بھی صحیح ہے پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ خواہ اجسام کسیقدر ہون کسی سمت مین اونکے قوائے حرکت کی اجزا منفصلہ کا حاصلجمع اوسیقدر ہے جیساکہ وہ تمام اجسام باہم ہوکر اپنے مرکز ثقل مین ایک ذرہ کیطرح موجود ہونیکی حالت مین سمت مذکور مین پیدا کرتی اور یہ بھی ظاہر ہے کہ اگر وے سب اجسام سرعت یکسان سے متحرک ہون تو انکا مرکز ثقل بھی سرعت یکسان سے حرکت کرتا رہیگا۔کیونکہ مساوات مذکورہ حد بالا مین گ۱ اور گَ۱ مقدار مستقل ہین اسلئے گ۱ اور گ۲ بھی مقادیر مستقل ہوگئے۔ اور اگر اجسام کے سرعت یکسان نہو تو اونکی مرکز ثقل کی حرکت یعنے گ۱ اور گ۲ صرف ایک لحظہ معینہ کے لئے درست ہوگی اور اس لحظہ کے بعد مختلف ہوجائیگی (دیکھو حد ۱۳)

(۹۶) اگر اجسام اسراع یکسان سے حرکت کرین تو بیان مذکورہ بالا سے اونکے مرکز ثقل کا اسراع بھی دریافت ہوسکتا ہے۔مثلاً فرض کرو کہ ع۱ و ع۲ و عَ۱ و عَ۲ جداگانہ کسی محور مین دو اجسام کے اسراع کے اجزا منفصلہ کو تعبیر کرتے ہین تو ابتدا مین وہ محور سے اونکے مرکز ثقل کا فاصلہ

$$ل = \frac{ج_۱ م_۱ + ج_۲ م_۲}{ج_۱ + ج_۲}$$

اسلئے اس محور کے متوازی مرکزِ ثقل کا فاصلہ طے شدہ

$$= \text{مَ} - \text{م} = \frac{(\text{ج}_1\,\text{گ}_1 + \text{ج}_2\,\text{گ}'_1)\,\text{س}}{\text{ج}_1 + \text{ج}_2}$$

اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ اگر اُس لحظہ مین مرکز ثقل کی سرعت کا جزو منفصلہ و آ کے متوازی گسل ہو تو

$$\text{گس}_1 = \frac{\text{ج}_1\,\text{گ}_1 + \text{ج}_2\,\text{گ}'_1}{\text{ج}_1 + \text{ج}_2}$$

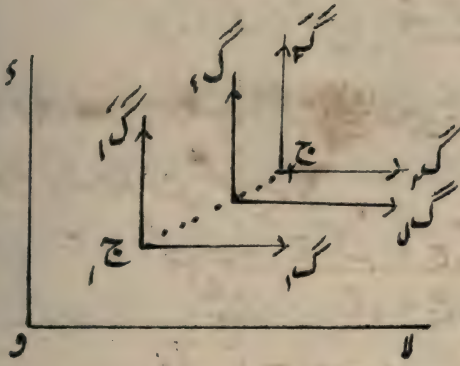
$$\therefore\ \text{گس}_1\,(\text{ج}_1 + \text{ج}_2) = \text{ج}_1\,\text{گ}_1 + \text{ج}_2\,\text{گ}'_1$$

مگر ج۱ × گ۱ اور ج۲ گَ۱ اوس لحظہ مین اجسام کے و آ محور کے متوازی قوت حرکت کے اجزائے منفصلہ ہین اسلئے اس مساوات سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ اگر متحرک جسمونکی قوائے حرکت کو ہم کسی خاص سمت مین منفصل کرین تو ان اجزاء منفصلہ کا حاصل جمع اُس قوت حرکت کے مساوی ہوتا ہے جیساکہ وہ تمام اجسام مجتمع ہوکر ایک ذرہ کی مانند اپنی مرکز ثقل مین موجود ہونیکی حالت مین سمت مذکورہ مین پیدا کرتے

اگر گ۲ اوس لحظہ مرکز ثقل کی سرعت کا جزو منفصلہ محور و ء کے متوازی ہو تو

$$\text{گ}_2 = \frac{\text{ج}_1\,\text{گ}_2 + \text{ج}_2\,\text{گ}'_2}{\text{ج}_1 + \text{ج}_2}$$

اور اسلئے مرکز ثقل کی حاصل سرعت یا واقعی سرعت $= \sqrt{\text{گ}_1^2 + \text{گ}_2^2}$

(۹۴) دو اجسام ج۱ اور ج۲ ایک ہی سطح مین حرکت کر رہی ہین - کسی لحظہ معین مین اُنکے مرکز ثقل کی سرعت دریافت کرو

فرض کرو کہ سطح حرکت مین دو محور علی القوائم و‌ل اور وی لئے گئے ہین اور کسی خاص لحظہ مین فاصلہ اجسام کے انسے جداگانہ ن۱ م۱ اور ن۲ م۲ ہین اب انفصال سرعت کے قاعدہ سے اجسام کی سرعتون کو محورون کے متوازی منفصل کرو فرض کرو کہ و‌ل کے متوازی ہر دو سرعت کی اجزاء منفصلہ گ۱ اور گَ۱ ہین اور وی کے متوازی اُنکی اجزاء منفصلہ جداگانہ گ۲ اور گَ۲ ہین اسلئے اگر اُس لحظہ معینہ مین اجسام کے مرکز ثقل کا فاصلہ محور وی سے مَ ہو تو

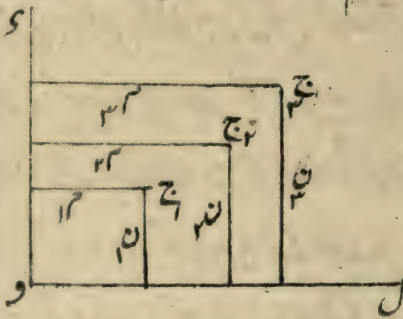
$$\bar{\text{م}} = \frac{\text{ج}_1\text{م}_1 + \text{ج}_2\text{م}_2}{\text{ج}_1 + \text{ج}_2}$$

لیکن ایک عرصہ قلیل س کے بعد یہ اجسام اپنے مقام سے محور و‌ل کے متوازی جداگانہ گ۱ × س اور گَ۱ × س فاصلہ طے کرینگے اسلئے اگر س عرصہ کے آخر مین مرکز ثقل کا فاصلہ محور وی سے مَ ہو تو

$$\bar{\text{م}}' = \frac{\text{ج}_1\{\text{م}_1 + \text{گ}_1\text{س}\} + \text{ج}_2(\text{م}_2 + \text{گ}'_1\text{س})}{\text{ج}_1 + \text{ج}_2}$$

باب دہم

اجسام کے مرکز ثقل کی حرکت کے بیان مین

(۹۳) جسم کے مرکز ثقل کا بیان علم سکون سے متعلق ہے اور جبکہ اجسام کے مقامات معلوم ہون تو اُن کے مرکز ثقل کا مقام دریافت کرنیکا طریق بھی اُسی مین درج ہے مگر سہولیت کے لیے اسکو کچھ بطور خلاصہ بیان لکھتے ہین ۔

فرض کرو کہ ج$_1$ و ج$_2$ و ج$_3$ وغیرہ اجسام کے مقادیر ہین اور و ل اور و ع دو محور علی القوائم ہین جنکے وسیلہ سے اجسام کے مقامات کی محددین معلوم ہین یعنی و ع محور سے اجسام کے بُعد جداگانہ م$_1$ و م$_2$ و م$_3$ ۔۔۔ وغیرہ ہین اور و ل محور سے اُن کے بُعد جداگانہ ن$_1$ و ن$_2$ و ن$_3$ ۔۔۔ وغیرہ ہین تو علم سکون مین ثابت ہے کہ اگر اُن کے مرکز ثقل کا اُن محورون سے فاصلہ جداگانہ نَ اور مَ ہو تو

مَ = (ج$_1$ م$_1$ + ج$_2$ م$_2$ + ج$_3$ م$_3$ ۔۔۔ وغیرہ) ÷ (ج$_1$ + ج$_2$ + ج$_3$ ۔۔۔ وغیرہ) = Σ (ج م) ÷ Σ (ج) مختصراً

اور نَ = (ج$_1$ ن$_1$ + ج$_2$ ن$_2$ + ج$_3$ ن$_3$ ۔۔۔ وغیرہ) ÷ (ج$_1$ + ج$_2$ + ج$_3$ ۔۔۔ وغیرہ) = Σ (ج ن) ÷ Σ (ج) مختصراً

حرکت کے دوسرے قانون سے ظاہر ہے کہ ایک ہی طاقت مختلف اجسام پر عمل کر کے مختلف اسرع پیدا کرتی ہے اِسلئے دونون اشیا جو باہمی عمل کرتے ہین اگر اون کا جسم مختلف ہو تو مساوی عمل سے بھی اُنکی حرکت پیدا شدہ مختلف ہوگی اسی طرح کسی گیند کی کشش زمین پر اور زمین کی کشش گیند پر باہم مساوی ہے مگر گیند کا جسم چونکہ نہایت صغیر ہے اِسلئے زمین کی عمل سے اُسمین جو اسرع پیدا ہوتا ہے وہ بہت زیادہ ہے اور زمین کا جسم بہت زیادہ ہونیکے سبب گیند کی کشش سے اُسمین جو اسرع پیدا ہوتا ہے نہایت کم بلکہ غیر محسوس ہے *

(۹۴) بیان متذکرہ بالا کا علانا تجربہ سے اِسطرح لکھا جاتا ہے فرض کرو کہ ج اور جَ دو اشیا کے جسم ہین اور اُن کے باہمی عمل کی طاقت کا مقدار ط سے تعبیر ہے اور اس عمل سے ہر دو مین جو اسرع پیدا ہوتے ہین وہ ع اور عَ ہین تو

$$ط = ج \times ع$$

$$ط = جَ \times عَ$$

$$\therefore ج\ ع = جَ\ عَ$$

$$\therefore \frac{ع}{عَ} = \frac{جَ}{ج}$$

یعنی اسرع پیدا شدہ شی معمول* کے جسم کے مقدار سے نسبت معکوس رکھتا ہے *

---

* معمول سے وہ جسم مراد ہے جسپر طاقت عامہ عمل کرتی ہو

یہ شک غلطی پر مبنی ہے - کیونکہ حرکت کے قانون سیوم کا مطلب
یہ نہین کہ طاقت بیرونی کے عمل سے جسم پر حرکت نہوگی بلکہ خلاصہ
یہ ہے کہ دو اشیاء کا عمل باہمی مساوی ہے یہ عمل باہمی بھی طاقت بیرونی
کی طرح اسراع پیدا کرنیکی قابلیت رکھتا ہے - شئے متحرک کے جسم کا مقدار
اور طاقت عاملہ کے مقدار ہر دو پر خیال نہ رکھنے کی سبب یہ غلطی واقع ہوئی
ہے - مثال سے غور کرو کہ گھوڑا گاڑی پر جس طاقت سے عمل کرتا ہے
وہ اسکے بدن کے جسم سے متعلق نہین ہے بلکہ یہان ایسا کہنا لازم ہے کہ
گھوڑے کی طبیعی طاقت اپنے بدن اور گاڑی دونو جسم پر عمل کرکے حرکت
پیدا کر رہی ہے اجسام کا عمل باہمی اور اونپر طاقت بیرونی کا عمل ان
ہر دو مین بڑا اختلاف سمجھنا چاہئے - حرکت کے دوسرے قانون کے
بیان سے ہمین معلوم ہوا ہے کہ جب کبھی کسی جسم پر کوئی بیرونی طاقت
عمل کرتی ہے خواہ وہ طاقت کسی دوسری شئے کی کشش وغیرہ سے
پیدا ہوئے ہو یا اور کسی طرح سے تب اگر کوئی طاقت مخالف موجود نہو
تو اسمین حرکت ضرور پیدا کریگی مثلاً کسی میز پر رکھی ہوئی چیز اوسپر
جو دباؤ کرتی ہے اس سے میز کی حرکت ضرور ہو سکتی ہے لیکن زمین
کے فعل انفعالی نے مخالف سمت مین عمل کرکے اسی اعتدال مین رکھا
ہے اسطرح میز بھی اس شئے پر جو عمل مخالف کر رہی ہے اس سے
شئے کے اوپر لیطرف حرکت ہو سکتی ہے لیکن کشش ثقل نے
اسکے برخلاف عمل کرکے اسی اعتدال مین رکھا ہے -

(ب) جب کوئی شے کسی رسی یا لاٹھی سے دوسری شے کو کھینچے تو وہ دوسری شے بھی اُسے اپنی طرف مساوی طاقت سے کھینچتی ہے یعنی رسی کے ہر ایک نقطہ میں طاقت کشش مقدار میں مساوی ہے۔ علم سکون میں یہ نتیجہ اکثر مانا ہوا ہے ÷

(ج) جب کوئی شے کسی دوسری شے کو صدمہ دیکر اُسکی حرکت میں تبدیلی واقع کرتی ہے تو دوسری شئے کے صدمہ سے اسکی اپنی حرکت میں بھی طاقت مساوی سے سمت مخالف میں تبدیلی واقع ہوتی ہے

(د) اگر کوئی شے کسی دیوار پر ٹھوکر کھائے تو دیوار بھی اُس پر مساوی طاقت سے سمت مخالف میں عمل کرتی ہے اور اسی سبب سے شئے لوٹ کر واپس آتی ہے ÷

(ہ) جب ایک شے دوسری شے کو کسی طاقت سے کھینچے تو شے مجرور بھی طاقت مساوی سے شے اول کو اپنی طرف کھینچتی ہے۔ اور یہ اشیا ساکن ہوں خواہ متحرک اُنکی کشش ایک دوسری پر ہر حالت میں مساوی ہے مثلاً زمین جس طاقت سے کسی شے پر کشش کرتی ہے وہ شے بھی برابر طاقت سے مخالف سمت میں زمین کو کشش کرتی ہے ÷

(۱۹) یہ شبہہ نہ کرنا چاہیے کہ اشیار مساوی فعل فعالی اور فعل انفعالی کے تاثر سے حالت سکون میں رہینگیں اور اُنمیں سے ہر ایک کی حرکت ناممکن ہے یعنی جب کوئی گھوڑا کسی گاڑی کو کھینچتا ہے تو گاڑی بھی اُسی طاقت سے اگر گھوڑے کو کشش کرے تو ہر دو حالت سکون میں ہو جائینگے

باب نہم

سوم قانون حرکت

(۸۹) جہان جسم منفرد ہے وہان طاقت معین کے عمل سے جو حرکت پیدا ہوتی ہے اُس کا بیان حرکت کے اول اور دوم قانون سے متعلق ہے لیکن جب جسم ایک سے زیادہ ہین اور ایک دوسرے پر کسیطرح عمل کرتے ہین تو اُنکی حرکت کا صحیح بیان قانون سیوم سے متعلق ہے۔ وہ قانون حسب ذیل ہے ؛

جب ایک شے کسی دوسری شے پر کسی سمت مین کسیطرح پر عمل کرتی ہے تو دوسری شے بھی اول شے پر سمت مخالف مین مقدار مساوی سے عمل کرتی ہی یعنی اشیاء کا باہمی عمل مقدار مین مساوی ہے مگر سمت مین مخالف ،،

(۹۰) اشیاء ساکن ہون خواہ متحرک اُس کا باہمی عمل ہر حالت مین مساوی ہے۔ اور سمت مین مخالف۔ امثلہ ذیل سے اس کا مطلب معلوم ہو جائیگا ؛

(۹۱) کوئی شے میز پر رکھی ہوئی ہے کشش ثقل کے سبب سی وہ میز کو دباتے ہی ظاہر ہی کہ ہمیشہ وہ شے زمین کے مرکز کی طرف حرکت کرنیکو ساعی ہے اور میز جسپر وہ دہری ہے سمت مخالف مین اُس پر فعل انفعالی سے مساوی عمل کر کے اُسے اعتدال مین رکھتی ہے ؛

مین حرکت کرتا ہے اسکا اسراع مرکز کی سمت مین برابر $\frac{گ^{2}}{ما}$ کے ہے
یعنی اس اسراع کے ساتھہ وہ جسم مرکز کی طرف جانیکی کوشش کرتا ہے
(بموجب حد ۵۸)

$$اسلئے اُسکا قوت اسراع = \frac{ج گ^{2}}{ما}$$

اور چونکہ جسم ہر لحظہ مین مرکز کے ایک مستقل فاصلہ پر رہتا ہے اسلئے ظاہر ہے کہ ہر لحظہ مین مرکز کے مخالف سمت مین ایک طاقت اُس جسم پر عمل کرسکے اوسکے مرکز کی طرف حرکت کو روک دیتی ہے - ایسی طاقت کو قوت ہاربہ کہتے ہین اور اسکی قیمت جسم کی قوت اسراع مذکور کے برابر ہے اُس طاقت کے پیدا ہونیکا سبب باب آئندہ مین بیان ہوگا ٭

پتھر کے جو تھوڑی سی سرعت سے متحرک ہو زیادہ ہو سکتی ہیں۔

(۸۵) جب کوئی شئے سرعت مستوی سے متحرک ہے تب بھی ج × ل کو اوسکے قوتِ حرکت کہا جاتا ہے اس حالت مین شئے پر کوئی طاقت عمل نہین کرتی لیکن حرکت پیدا کرنیکے لئے ابتدا مین کوئی صدمہ وغیرہ کی طاقت ضرور لگائی گئی ہوگی جسکا مقدار اس قوتِ حرکت سے تعبیر ہوتا ہے۔ یہان ل ایک مقدار مستقل ہے اسلئے قوتِ حرکت بھی ہر لحظہ مین مستقل رہیگی۔

(۸۶) جب طاقت مستقلہ عمل کر کے جسم پر اسراع یکسان پیدا کرتی ہے اوس حالت مین ل کا مقدار ہر لحظہ مین بدلتا رہتا ہے اور اکائی وقت مین اسکے تبدیلی کو ہم اسراع کہتے ہین اسلئے صاف ہے کہ اگر ع اُس اسراع کو تعبیر کرے تو ج × ع قوتِ حرکت کی اکائی وقت مین تبدیلی کو تعبیر کریگی۔ اسی سے ہم جسم کی قوت اسراع کے نام سے نامزد کرینگے۔

(۸۷) چونکہ طاقت عاملہ اور جسم اور اسراع پیدا شدہ ہر سہ کی نسبت درمیانی نسبت ذیل سے ظاہر ہے

یعنے ط ∝ ج × ع

اسلئے حرکت کے دوسرے قانون کا بیان اسطرح بھی ہو سکتا ہے یعنے جسم پر طاقت عاملہ کا مقدار اسراع پیدا شدہ کے مقدار کے متناسب ہے جسطرح کی اکائی طاقت اور اکائی اسراع اور اکائی جسم کے فرض کرنے سے یہ نسبت مساوات کے طور پر ہو جاتی ہے اوسکا بیان حد (۸۰) مین ہو چکا ہے

(۸۸) جب کوئی جسم سرعت مستوی (گ) سے کسی دائرہ کی محیط

اگر وہان اسکی حرکت روک دی جاوے تو اوسکی حرکت کے روکنے کے لئے کسی طاقت کا ہونا ضرور ہے - ظاہر ہے کہ جسقدر طاقت اوس لحظہ مین اوس جسم پر اوس سرعت کو پیدا کرنیکے قابل تھے اسکی مزاحمت کیے لئے بھی اسیقدر طاقت کے ہونیکی ضرورت ہے - یعنے ج × ل سے طاقت تعبیر شدہ اوس مزاحم طاقت کو بھی تعبیر کریگی - اور ج × ل کی قیمت ل کے متناسب ہی یعنی جسم کی سرعت کم یا زیادہ ہونے سے اسکی قیمت بھی کم و بیش ہوتی ہے - اسی سبب سے ج × ل مقدار کو جسم کے اُس لحظہ مین قوت حرکت کہنا درست ہی

قوت حرکت

(۸۳) ایسا خیال نکرنا چاہئے کہ جسم کی سرعت کی زیادتی ہے اوسکی کی زیادتی کا باعث ہے بلکہ جو جسم زیادہ طاقت سے متحرک کیا گیا ہو اوسکی سرعت بھی زیادہ ہوتی ہے اسلیئے طاقت عاملہ ابتدائی کی زیادتی کو قوت حرکت کی زیادتی کا باعث سمجھنا چاہیئے - مثلاً توپ کے گولہ کے قوتِ حرکت بہت ہے اوسکا یہ سبب نہین کہ اوسکی سرعت زیادہ ہے بلکہ اوسکا سبب یہ ہے کہ وہ ابتدا مین زیادہ طاقت سے متحرک کیا گیا ہے

(۸۴) ط = ج ل اس مساوات سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ جسم کی قوتِ حرکت کسی لحظہ مین نہ صرف ل پر بلکہ ج پر بھی منحصر ہے یعنے اگر دو مختلف اشیا کی سرعت کسی لحظہ مین مساوی ہو تو اس شئے کی قوتِ حرکت زیادہ ہوگی جسکے جسم کا مقدار زیادہ ہے - مثلاً بندوق کی گولی کا جسم صغیر ہے لیکن سرعت زیادہ ہونے سے اُسکی قوتِ حرکت بہ نسبت ایک پہاری

∴ ط = م ج ع جہانکہ م ایک مقدار مستقل ہے
اور جسکی قیمت طاقت اور جسم اور اسراع کی اکائیون پر منحصر ہے لیکن
یہ بیان ہوچکا ہے کہ حکمانے ایسی ایک طاقت کو اکائی فرض کیا ہے
جوکہ اکائی جسم پر عمل کرکے اکائی اسراع پیدا کرتی ہے - اسلیئے اگر
طاقت کی یہ اکائی مان لیجائے تو

ا = م × ا × ا   یعنی م = ا

∴ ط = ج ع × اکائی طاقت مذکورہ بالا

یعنے جو طاقت جؔ جسم پر عمل کرکے ع اسراع کو پیدا کرتی ہے
اسکا مقدار ج × ع گنا اکائی طاقت کا ہے

(۸۱) حد ۳۳ مین بیان ہوچکا ہے کہ اگر کوئی ذرہ اسراع ع کے ساتھ
س وقت تک شروع سے چلکر آخر مین ل سرعت حاصل کرے تو ل = ع × س
∴ ط = ج ل/س اس سے ثابت ہوتا ہے کہ اگر وقت حرکت مقدار مستقل ہو
تو ط ∝ ج ل اور اگر اُس طاقت کو اکائی فرض کی جاوے جوکہ اکائی
جسم پر عرصہ س تک عمل کرکے اکائی سرعت حاصل کراتی ہے تو یہ نسبت
مساوات ہوجاتی ہے یعنے ط = جؔ لؔ

(۸۲) تعریف - اگر کسی لحظہ مین کوئی جسم ج سرعت ل سے چلتا
ہو تو ج × ل اس مقدار کو اُس لحظہ مین جسم کی قوت حرکت کہتے ہین -
اس تعریف کا مطلب بیان ذیل سے حاصل ہوگا - فرض کرو کہ کوئی
جسم جؔ کسی لحظہ مین سرعت لؔ سے کسی سمت مین چلتا ہے -

پیدا ہو گی جسم کا مقدار اسیقدر زیادہ دریافت ہوگا جسم مین ایک ہی طاقت کے عمل سے جو سرعت کی کمی بیشی معلوم ہوتی ہے تو اُسکا سبب یہ ہے کہ جسم ذرات کا ایک مجموعہ ہے اور چونکہ ہر ذرہ یکسان ہے اسلئے اگر کوئی طاقت کسی ایک ذرہ پر عمل کرکے ایک سیکنڈ مین ۵ فٹ کے حساب سرعت پیدا کرسے تو کل جسم مین ۵ فٹ کے حساب سرعت کو پیدا کرنے کے لئے اوسقدر زیادہ طاقت درکار ہے جسقدر کہ اُس جسم مین ذرون کا مقدار ہے اس سے ظاہر ہوتا ہی کہ مختلف اجسام مین ایک ہی سے سرعت کو پیدا کرنیکے لئے طاقت عاملہ کا مقدار جسم کے مقدار کے متناسب ہونا چاہئے مہندسین سہولت کے لئے ایسے ایک جسم کو اکائی فرض کرتے ہین کہ جسپر اکائی طاقت اکالی وقت تک عمل کرکے اکائی سرعت کو پیدا کرے یعنی جسمین اکائی اسراع کو پیدا کرے

(۸۹) پس بحث مذکورہ بالا سے ظاہر ہے کہ جب جسم کا مقدار مستقل رہے تو کوئی طاقت اوسپر عمل کرکے جو اسراع پیدا کرتی ہے اُسکا مقدار طاقت عاملہ کے مقدار کے متناسب ہوتا ہے یعنی اگر ط اور ع جدا گانہ جسم ج پر طاقت عاملہ کو اور اسراع پیدا شدہ کو تعبیر کرے

ہو تو ط ∝ ع جبکہ ج مستقل ہے

اور یہ بھی ثابت ہو چکا ہے کہ ایک ہی سا اسراع پیدا کرنے کے لئے طاقت عاملہ کا مقدار جسم کے مقدار کے متناسب ہونا چاہئے یعنی ط ∝ ج

جبکہ ع مستقل ہے

∴ جبکہ اسراع اور جسم دونو غیر مستقل تو ط ∝ ج ع

سرعت پیدا کرے اُسی مقدار (۱) سے تعبیر کیا جائیگا - اور اسیطرح جو طاقت
اُسے جسم پر ایک سیکنڈ تک عمل کرکے فی سیکنڈ مین ۱۰ فٹ کے حساب
سرعت کو پیدا کرے اُسکو مقدار (۱۰) سے تعبیر کیا جائیگا - اسطرح کی جو اکائی
طاقت لیجاتی ہے اوسے علمی اکائی طاقت کہتے ہین -

(۷۵) جسم کسے کہتے ہین ہر ایک کو معلوم ہے لیکن زبان سے اسکی
تعریف مشکل ہے مختصرًا جو شئے طاقت سے منفعل ہونیکی قابلیت رکھتی
ہے اوسے جسم کہتے ہین مثلاً کسی شئے کا عرض یعنے رنگ طول وغیرہ
خاصیتین طاقت کے عمل کی قابلیت نہین رکھتے ہین اسلئے یہ خاصیتین
جسم کے معنی مین داخل نہین - زمین پر جو شئے موجود ہے سب پر کشش
ثقل عمل کرکے اسمین وزن پیدا کر دیتی ہے - پس اگر شئے کو ایسی جگہ پر
پہنچا ناممکن ہوتا جہان کشش ثقل عمل نہ کرے تو اُسکا وزن کچھ نہ رہتا
مگر اُسکا جسم موجود رہیگا - چنانچہ ہم یہ کہہ سکتے ہین کہ جس خاصیت کے
موجود ہونیسے کشش ثقل شئے مین وزن پیدا کرتی ہے وہی اُس شئے
کا جسم کہلاتا ہے - جسم پر طاقت عاملہ معینہ کے نتیجہ کی کمی زیادتی دیکھکر
جسم کی بھی کمی بیشی معلوم ہوتی ہے - مثلاً اگر کوئی طاقت کسی جسم پر کسی
وقت معین تک عمل کرکے سیکنڈ مین دس فٹ کے حساب سرعت
پیدا کرے - اور یہی طاقت کسی دوسرے جسم پر اُسی وقت تک عمل کرکے
سیکنڈ مین صرف پانچ فٹ کے حساب سرعت پیدا کرے تو صاف ظاہر ہے
کہ یہ دوسرا جسم جسم مذکورہ سے دوچند ہے اسیطرح جسقدر سرعت کم

اسکا یہ سبب ہو کہ کشش ثقل اُس پتھر پر جو کہ ہماری طاقت کے مخالف اور مقدار
مین زیادہ ہے عمل کرکے اوسے زائل کردیتی ہے

(۷۸) چونکہ طاقت غیر محسوس ہے اور صرف حرکت پیدا کردہ سے اُسے
معلوم کرتے ہین اسلیئے اوسکے مقدار کے ناپنے کے لیئے بھی اُس حرکت
پر ہی غور کرنا آسان طریقہ ہے - اسکے لیئے عالمون نے مفصلہ ذیل
قاعدہ مقرر کیا ہے یعنے فرض کرو کہ کوئی طاقت مستقلہ کسی جسم پر کسی وقت
معین تک عمل کرکے کسیقدر سرعت پیدا کرتی ہے تو صاف ہو کہ کوئی
طاقت جوکہ اُسی جسم پر اُسی وقت تک عمل کرکے اُسکے دوچند سرعت
پیدا کرے وہ طاقت اول طاقت سے مقدار مین دوچند ہوگی - یعنے اگر
طاقت اول مقدار (۱) سے تعبیر کیا جاوے تو طاقت دوم مقدار (۲)
سے تعبیر ہوگی اسی طرح جو طاقت اُس جسم پر اُسی وقت تک عمل کرکے سہ چند
سرعت پیدا کرتی ہو وہ مقدار مین بھی طاقت اول کے سہ چند ہوگی یعنے
مقدار (۳) سے تعبیر ہوگی اور علی ہذا القیاس - پس اس طرح طاقت کی
پیمائش جسم کی اکائی سرعت کی اکائی اور وقت کی اکائی تینون پر منحصر
ہے یعنے یہ تین اکائیان مختلف لینے سے طاقت کی اکائی بھی مختلف
ہوجائیگی - حکماء بنظر سہولیت ایک ایسے طاقت کو اکائی فرض کرتے ہین جوکہ
اکائی جسم پر اکائی وقت تک عمل کرکے اکائی سرعت کو پیدا کرتی ہے -
مثلاً - اگر ایک سکنڈ اکائی وقت اور ایک فٹ اکائی فاصلہ ہو تو جو طاقت
اکائی جسم پر ایک سکنڈ تک عمل کرکے ہر سکنڈ مین ایک فٹ کے حساب

کس جسم پر عمل کرے تو اُسکے نتیجہ مین اسراع یکسان پیدا ہوتا ہے کیونکہ اگر کوئی طاقت جسم پر ایک لحظہ تک عمل کرے تو اُسکے نتیجہ مین جو سرعت پیدا ہوتی ہے حرکت کے پہلے قانون کے روسے اُس سے جسم بشتر یکسان متحرک رہتا ہے - اسلئے اگر پھر دوسرے لحظہ مین وہی طاقت عمل کرے تو اُس سے جونئی سرعت پیدا ہوتی ہے وہ اور سرعت اول ملکر دوچند ہو جاتی ہین - اسیطرح اگر وہ طاقت کچھ عرصہ تک عمل کرتا رہے تو جسم کی سرعت رفتہ رفتہ یکسان بڑہ جاتی ہے اگویا جسم اسراع یکسان سے چلتا ہی جو طاقت جسم پر کچھ عرصہ تک عمل کرتی ہو اور جسکی مقدار برابر رہتی ہو اسی طاقت مستقلہ کہتے ہین صدمہ وغیرہ کی طاقتون سے اس مین فرق ہے

(۷۶) حرکت کے دوسرے قانون کا حصہ دوم یہ ہے کہ طاقت کے عمل سے جو جسم پر اسراع پیدا ہوتا ہے وہ ہمیشہ طاقت کی مقدار کا متناسب ہے - اس قانون کی بخوبی سمجھنے کے لئے اول جسم اور طاقت کے ملنے کے طریقہ پر خیال کرنا واجب ہے

(۷۷) بیان ہو چکا ہے کہ طاقت مستقلہ سے جسم مین اسراع یکسان پیدا ہوتا ہے - جہان کہ طاقت کے عمل سے جسم پر کوئی حرکت پیدا نہوئی ہو وہان ضرور کوئی اور طاقت مخالف سمت مین عمل کرکے اُسے زائل کر دیتی ہوگی - اور یہ بھی ظاہر ہے کہ جسم کا مقدار خواہ کسیقدر صغیر یا کبیر ہو اگر کوئی طاقت مخالف نہو تو طاقت عاملہ اُسپر ضرور کسیقدر حرکت پیدا کرےگی ہم اپنی قوت بدنی سے کسی بہت بھاری پتھر کو اٹھا نہین سکتے ہین

حرکت کے دوسرے قانون کی مثال اکثر مشاہدہ مین آتی ہے - جب
کوئی ملاح اپنی ناؤ کو ایک کنارہ سے دوسرے کنارہ تک لیجانا چاہتا ہے
تو اسی قانون کی پابندی سے مقابل کے کنارہ پر سیدھا نہین جاسکتا
مگر موج کے زور سے کچھ نیچے چلا جاتا ہے - ایک عمدہ مثال یہ بھی
ہے کہ جب کسی جہاز کے مستول سے کوئی گیند گرے تو جہاز روان ہو یا
نہو وہ گیند عین اوس مستول کے پاؤن مین گرتی ہے - یا اگر کوئی
شخص روانہ ریل گاڑی پر سے ایک گیند کو سمت راس مین پھینکے تو وہ
اُسی کے ہاتھ پر پھر آپڑتی ہے - اب دیکھنا چاہئے کہ گیند کو مستول کے
سر سے پانون تک گرنے مین جو وقت صرف ہوا ہی اُسوقت مین جہاز
بھی کچھ فاصلہ پر چلا ہوگا تو گیند اُتنا فاصلہ پیچھے کیون نہ گرے اسکا
سبب یہ ہی کہ جس سرعت سے جہاز حرکت کرتا تھا وہ سرعت گیند مین
بھی اشتراکاً موجود تھی اور کشش ثقل کے عمل کے باعث نیچے گرنے مین
اُسکی سرعت مذکورہ مین کچھ فرق پیدا نہین ہوتا یعنے گیند بہ سبب
اپنی سرعت مشترکہ کے اوتنا ہی فاصلہ خط افقی مین طی کریگی جتنا
کہ کشش ثقل کے عدم موجودگی مین طی کرتی اور اسیطرح کشش ثقل کا
عمل بھی اُسپر ویسا ہی ہوگا جیسا کہ جہاز کے ساکن رہنے سے ہوتا ہے
پس نتیجہ یہ ہوتا ہے کہ اُن دونو سببون سے گیند مستول کے عین
پاؤن پر گرتی ہے -

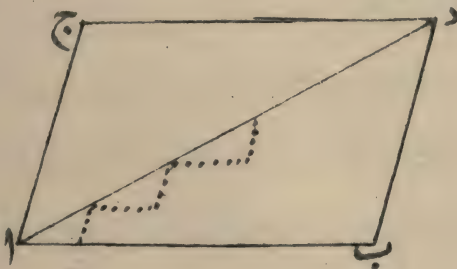
(۷۵) اس قانون سے یہ بھی ظاہر ہوتا ہے کہ جب کوئی طاقت مستقلہ

اور اج کی سمت مین عمل کر رہے ہین - اور ایک لحظہ عمل کرکے جو سرعتیں‌ہای پیدا کرتی ہین وہ جداگانہ خط اب اور اج سے تعبیر ہوتے ہین - اب سرعتون کے متوازی الاضلاع کے اصول سے ظاہر ہے کہ حاصل سرعت وتر ا د سے تعبیر ہوگی - حرکت کے دوسرے قانون سے بخوبی معلوم ہو جائیگا کہ کیونکر ان دونوں سرعتونکے ساتھہ جسم خط ا د پر حرکت کرتا ہے اُس قانون کے بموجب دونوں طاقتونکا عمل ایکدوسرے سے بالکل علیحدہ ہے اسلیئے ظاہر ہے کہ کسی نہایت قلیل عرصہ مین جبکہ جسم سرعت ا ب کے ساتھہ خط اب پر حرکت کرنے لگتا ہے تو اُس عرصہ مین وہ بسبب دوسری سرعت کے خط ا ج پر بھی حرکت کرنیکو مائل ہے علے ہذا القیاس ہر لحظہ مین یہی عمل وقوع مین آتا ہے اور اُسکا یہ نتیجہ ہوتا ہے کہ انجام مین ذرہ نقطہ د پر پہونچتا ہے ذرہ کی اسطور کی حرکت مین دونوں طاقتونکا عمل علیحدہ علیحدہ ظہور مین آتا ہے کیونکہ اگر صرف پہلی طاقت عمل کرتی تو ذرہ ا اکائی وقت کے انجام مین نقطہ ب پر پہونچتا اور اگر صرف دوسری طاقت عمل کرتے تو نقطہ ج پر - اب ذرہ نقطہ د تک پہنچا تو ہم خیال کرسکتے ہین کہ اُسنے پہلی طاقت کے سبب سے خط ا د کو طی کیا اور دوسرے کی سبب سے ب د کو جو کہ اج کے برابر ہے یعنے دونوں طاقتون کے علیحدہ علیحدہ عمل سے جو نتیجہ حاصل ہوتا ویسا ہی حاصل ہوا - دو سے زیادہ طاقتون کے لیئے بھی یہ دلیل کارآمد ہوسکتی ہے -

باب ہشتم

حرکت کا دوسرا قانون

(۴۷) حرکت کے دوسرے قانون کے دو حصے ہین - اوّل یہ کہ جسم پر طاقت عاملہ کا اثر ہر حالت مین اُسکی اپنی سمت خط مستقیم مین ہوتا ہے دوم یہ کہ جسم مین طاقت کے عمل سے جو سرعت پیدا ہوتا ہے اُسکی مقدار طاقت مذکور کی مقدار کی متناسب ہے -

اول حصہ کے معنی یہ ہین کہ اگر کوئی جسم حالت سکون مین ہو یا متحرک ہمین اگر ایک یا ایک سے زیادہ طاقت عمل کرے تو ہر ایک طاقت ویسا ہی عمل کریگی جیسا کہ وہ اکیلی ہونے کی حالت مین کرتی - مطلب یہ ہے کہ جب وہ طاقتین باہم عمل کرتی ہین تو ایک دوسرے کے عمل مین یا اُس جسم کی موجودہ سرعت مین کچھ دخل نہین دیتین پس دنیا مین اور اشیاء کی طرح طاقت بھی ضائع نہین ہوتی دوسری کوی طاقت اُسپر عمل کرکے صرف اُسکی صورت مین تغیر پیدا کر دیتی ہے

اسکا مطلب شکل مندرجہ ذیل سے ظاہر ہوگا فرض کرو کہ کسی جسم پر جو نقطہ ا پر واقع ہے دو طاقتین ا ب

علمانے اس قانون کو زیادہ تر عمدہ ترکیب سے ثابت کیا ہے وہ ترکیب
یہ ہے کہ اگرچہ وہ طاقتین جو جسم کی حرکت مین تغیر پیدا کرتی ہین
بالکل دور نہین ہو سکتین تاہم برابر مقدار کی طاقتین مخالف سمت
مین لگا کر ہم اون مخالف طاقتون کو زائل کر سکتے ہین - ہم جانتے
ہین کہ جب مخالف طاقتونکے عمل کے باعث جسم حالت اعتدال مین رہتا ہے
اور بعد ازان اس جسم مین حرکت پیدا کی جاوے تو وہ مخالف طاقتین اس
حرکت پر کچھ اثر نہین رکھتین - پس مشاہدہ سے تحقیق ہوا ہے کہ ایسی حالت
مین جسم کی حرکت ہمیشہ حرکت کے اول قانون کے موافق ہے -
باب یازدہم مین ایٹوڈ صاحب کے آلہ کے بیان مین اس تجربہ کی تصدیق
ہو جاوے گی -

ہونے کے لئے کسی بیرونی طاقت کا عمل ضروری ہے - اسیطرح جب کہ کسی طاقت کے عمل سے جسم مین حرکت پیدا ہو جاوے تو خود اسمین یہ طاقت نہین کہ پہر حالت سکون مین آجاوے یا اُس حرکت کو کسیطرح بدلے پس ساکن شی مین حرکت پیدا ہونا یا حرکت پیدا شدہ مین تبدیلی واقع ہونا بیرونی طاقت کی عمل سے ہی ہو سکتا ہے -

۷۷ اس قانون سے معلوم ہوتا ہے کہ جب ایکدفعہ کسی جسم مین حرکت پیدا ہو چکے تو آگے وہ جسم اُس حرکت کے ساتھہ برابر چلتا رہیگا یعنے یہ ضرور نہین ہے کہ جب تک وہ چلتا رہے اُسمین وہ طاقت جس سے حرکت پیدا ہوئی تھے برابر موجود رہے - اگر کوئی دوسرے طاقت حرکت پیدا شدہ کو زائل نہ کرے یا نہ بدلے تو وہ جسم دائمًا خط مستقیم مین حرکت کرتا رہیگا - کمان سے تیر وغیرہ اس قانون کے بموجب برابر حرکت مین نہین رہتا اسکا باعث یہ ہے کہ ہوا کی تحکیک اور زمین کی کشش اور سطح حرکت کے کھردراپن وغیرہ مخالف طاقتون سے یہ حرکت رفتہ رفتہ گھٹتے جاتی ہے - پس علمانے یہ ثابت کیا ہی کہ جسقدر اون مخالف طاقتون کو مختلف ذریعون سے کم کرتی جائینگے اسیقدر جسم متحرک کی حرکت یکسان خط مستقیم مین زیادہ دیر تک قائم رہیگی - مثلاً تجربہ کیا گیا ہے کہ اگر کسی جسم کو سطح برف پر پہیلایا جاوے تو وہ بہت دور جا کر ٹہرتا ہے اور اُسکی سرعت یکسان بہی بہت آہستہ آہستہ بدلتی جاتی ہے -

حرکت سی بہلتا ہی - اور ایسا فرض کرنے سے جسم کی ایک ذرہ کی حرکت ہی تمام جسم کی حرکت کو تعبیر کرے گی

(۱) حکیم مشہور نیوٹن صاحب نے ایک مدت دراز کے مشاہدہ سے مادہ کی حرکت کے لئے تین قوانین دریافت کئے ہین جو کہ علم حرکت کی بنیاد ہین حقیقت مین جسم پر کسی معین طاقت کے عمل کا صحیح صحیح نتیجہ مشاہدہ سے معلوم کرنا مشکل ہی - کیونکہ دنیا مین بہت سی طاقتین ایک ساتھہ ہی عمل کر رہی ہین اور ان مین سے ہر ایک کو الگ الگ کر کے اُنکے عمل کی تاثیر علیحدہ علیحدہ دریافت کرنا قریبًا ناممکن ہے - سب جگہہ ہوا کی تحکیک اور سطح حرکت کے کہردرے پن وغیرہ سے جسم متحرک کی حرکت مین تبدیلی واقع ہو جاتی ہے اور اسطرح سے مشاہدہ کی صحت مین فرق پڑ جاتا ہی مگر تب بھی ریاضی دانون نے حتے المقدور ان طاقتون کو علحدہ کر کے کسی معین طاقت کے نتیجہ کو دریافت کیا ہے - اور ان تینون قوانین کو صحیح پایا -

(۲) حرکت کا اول قانون یہ ہے - دنیا مین ہر ایک جسم یا تو ساکن رہیگا یا خط مستقیم مین سرعت یکسان سے حرکت کرتا رہیگا جب تک کہ کوئی طاقت بیرونی اوسپر عمل کر کے اُسکی حالت سکون یا حرکت یکسان کو بدل نہ دے - یعنے مادہ مین خود کسی طاقت کے پیدا ہونیکی قابلیت نہین ہے جب کوئی جسم حالتِ سکون مین رہتا ہے تو خود اُسمین کوئی کسی طرحکی بھی طاقت نہین کہ وہ اپنی جگہ کو بدل سکے اسلئے اوسمین حرکت پیدا

باب ہفتم

حرکت کا اول قانون

(۶۹) پچھلے ابواب مین ہمنے ذرہ کے صرف تبدیلی مقام پر بحث کی ہے۔ اور اسبات پر کہ وہ تبدیلی مقام کس وجہہ سے واقع ہوتی ہے کچھ خیال نہین کیا۔ طاقت عاملہ حرکت کی ابتدائی علت ہے لیکن واضح ہو کہ طاقت کا عمل ذرہ پر نا ممکن ہے کیونکہ ذرہ سے جسم کا اقل حصہ مراد ہے۔ تو مناسب ہو کہ جسم کی حرکت کا بیان کرین اور یہ بھی دکھلا دین کہ ذرہ کی حرکت کے بیان سے جسم کی حرکت کسقدر سمجھہ مین آسکتی ہے۔

(۷۰) واضح ہو کہ جسم ذرون سے مرکب ہے۔ اسلئے اگر ہم جسم کے ہر ایک ذرہ کی حرکت کو معلوم کر سکین تو کل جسم کی حرکت معلوم ہو جاوے گی مگر دقت یہ ہے کہ جسم کے ہر ایک ذرہ کی حرکت ایک قسم کی نہین ہوتی یعنے مختلف ذرے مختلف طور سے حرکت کرتے ہین۔ اگر دنیا مین خواہ کسی جسم کی حرکت پر خیال کرین تو معلوم ہو گا کہ اُسمین کسیقدر حرکت مُدَوَّرِی موجود ہے۔ ایسی حرکت کا بیان ریاضی کی اعلی شاخون سے متعلق ہے اسلئے یہان بیان نہین کر سکتے پس جس جگہہ متحرک جسم کا بیان آویگا وہان ہماری مراد یہ ہو گی کہ اُسمین حرکت مدوری بالکل نہین ہے اور اسکا ہر ایک ذرہ خطوط متوازی مین ایک ہی قسم کی

کسی لحظہ مین اُونکے درمیان کا فاصلہ = ا اور سرعت منتسب ایک کے
بلحاظ دوسرے کے = گ اور اگر گ کو اُس خط مین جو کہ دونون
ذرونکو ملاتا ہے اور اُس خط کے عمود مین منفصل کرین تو اجزاء منفصلہ
گ١ اور گ٢ ہونگے - ثابت کرو اُن ذرونکا کم سے کم درمیانی فاصلہ
= ا گ٢ / گ اور ابتدا سے اس ادنی فاصلہ پر پہنچنے مین اونکا ا گ١ / گ٢
وقت صرف ہوا

(۳) دو ذرے اسراع یکسان سے ایک خط مستقیم مین حرکت کرتے ہین تو
ثابت کرو کہ اگر کسی لحظہ مین اونکی سرعتونکی نسبت اونکی اسراعونکی
نسبت کے برابر ہو تو ایک کی سرعت منتسب بلحاظ دوسرے کے خط مستقیم
مین ہوگی اور اگر نسبتین مذکورہ برابر نہون تو دریافت کرو کہ سرعت
نسبت ایک کے بلحاظ دوسرے کے کسطرح کی ہوگی

(۴) ایک پہیہ جسکا قطر ۴ فٹ ہی چھہ میل فی گھنٹہ سرعت سے گھومتا چلا جاتا ہے
تو دریافت کرو کہ اُسکے مرکز کے لحاظ سے اوسکی نقطہ راس اور
نقطہ اسفل کی سرعت منتسب کیا ہے اور یہ بہی معلوم کرو کہ سطح زمین
کے لحاظ سے اون دونو نقطونکی سرعتہاے منتسب کیا ہونگی

جواب (۱) ۸،۸ اور - ۸،۸ (۲) ۱۷،۶ اور صفر

(۵) کوئی پہیہ سطح زمین پر حرکت کرتا ہے - تو کسی لحظہ مین اُسکے نقطہ راس کی سرعت
کی نسبت کسی اور نقطہ کی سرعت کے ساتھہ جو اُسکے محیط مین ہی اور
زمین سے جسکی اونچائی قطر کے چوتھائی حصہ کے برابر ہی معلوم کرو - جواب ۲ : ۱

م۱ = گَ جم αَ - گ جم α

اور م۲ = گَ جب αَ - گ جب α .....(حد ۴۴)

∴ م² = م۱² + م۲² = گ² + گَ² - ۲ گ گَ × جم (αَ - α)

مگر شکل سے ظاہر ہے کہ αَ - α = برابر اُس زاویہ کے ہے جو
گ اور گَ کی سمت کے درمیان ہے اسلئے اگر یہ زاویہ = θ ہے
تو م² = گ² + گَ² + ۲ گ گَ جم θ جو کہ حد ۲۶ مین ہم ثابت کر چکے ہین
فرض کرو کہ اس سرعت منتج کی سمت محور و لا سے زاویہ
φ بناتی ہے

تو شکل سے معلوم ہوگا کہ مس φ = م۲ / م۱ = (گَ جب αَ - گ جب α) / (گَ جم αَ - گ جم α)

سوالات باب ششم

(۱) کسی شخص کو جو بطرف پورب کے چار میل فی گھنٹہ سرعت سے
دوڑتا ہے معلوم ہوا کہ ہوا عین شمال کے رخ سے آتی ہے اور
جبکہ وہ دوگنی سرعت سے دوڑا تو معلوم ہوا کہ گوشہ شمال مشرق
سے آرہی ہے تو بتاؤ کہ ہوا اصلمین کس طرف سے آتی تھی -
اور اُسکی سرعت کیا تھی

جواب شمال مغرب - سرعت = ۴√۲

(۲) دو ذرے سرعت یکسان سے ایک سطح   مین چل رہی ہین

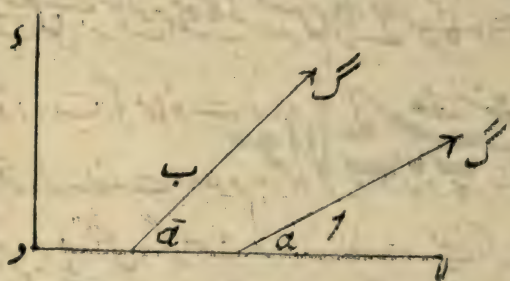
ذرہ ب کی سرعت منتسب کو مقدار اور سمت مین تعبیر کرتا ہے اسلیے

اگر سرعات گ اور گ َ کی سمتونکی درمیان کا زاویہ = θ تو زاویہ

لا ب ج = ۱۸۰° - θ

∴ (ب د)^۲ = (ب لا)^۲ + (ب ج)^۲ + ۲ ب لا × ب ج × جم (۱۸۰° - θ)

∴ م^۲ = گ^۲ + گ َ^۲ - ۲ گ گ َ جم θ

(۶۸) دفعہ مذکورہ بالا مین کسی خاص محور دونین ذرہ کے سرعتون کو منفصل کرکے بھی ہم سرعت منتسب کو معلوم کرسکتی ہین

مثلاً فرض کرو که سطح حرکت مین و لا اور و ی دو محور علی القوائم ہین اور سرعت گ اور گ َ

خط و لا کے ساتھہ جداگانہ α اور α َ زاویہ بناتے ہین - اگر ان سرعتونکو محور دونین منفصل کرو تو و لا محور مین اُنکے اجزاء منفصلہ جداگانہ = گ جم α اور گ َ جم α َ کے برابر ہونگے اور محور و ی مین جداگانہ = گ جب α اور گ َ جب α َ کے - اسلیۓ اگر محورونکی سمت مین بلحاظ ذرہ آ کے ذرہ ب کی سرعت منتسب کے اجزاء منفصلہ جداگانہ م۱ اور م۲ ہون تو

یعنے اسحالت مین ذرونکے بیچ کا فاصلہ ہر لحظہ مین برابر رہیگا اور ایک ذرہ کے لحاظسے دوسرے ذرہ کے مقام کی تبدیلی کچھ نہین ہوگی

(۶۵) جب دو ذرے مخالف سمتون مین حرکت کرین تو بیان مذکورہ بالا سے معلوم ہوگا کہ ذرہ آ کے لحاظ سے ذرہ ب کی سرعت منتسب سرعت گ کی سمت مین مقدار مین برابر گ + گَ کے ہوگی

(۶۶) واضح ہو کہ جیساکہ اوپر ہم نے ذرہ آ کے لحاظ سے ذرہ ب کی سرعت منتسب معلوم کرنے کا قاعدہ بیان کیا اسیطرح سے ذرہ ب کی لحاظ سے ذرہ آ کی سرعت منتسب معلوم ہو سکتی ہے غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ یہ دونو سرعات منتسب مقدار مین برابر ہونگی ۔ مگر سمت بہن مخالف ۔ یعنے اگر آ کے لحاظ سے ب کی سرعت منتسب م ہو تو ب کے لحاظ سے آ کی سرعت منتسب ـــ م ہوگی ۔

(۶۷) آ اور ب دو ذرے گ اور گَ جداگانہ سرعات یکسان سے مختلف سمتون مین حرکت کر رہے ہین تو ذرہ آ کے لحاظ سے ذرہ ب کی سرعت منتسب معلوم کرو ۔

شکل حد ۶۳ سے اور اُس حد کے بیان سے معلوم ہوگا کہ متوازی الاضلاع لاج کا وتر ب د ذرہ آ کے لحاظ سے

ایسی سرعت مشترک لگادین جو مقدار مین اوس ذرہ کی سرعت کے برابر ہے کہ جسکے لحاظ سے سرعت منتسب معلوم کرنی ہے مگر سمت مین اُسکی سرعت کے مخالف ہو اس سے وہ ذرہ ساکن ہو جاویگا اور دوسری ذرہ کی اپنی سرعت اور سرعت زیادہ شدہ کا حاصل سرعت جو ہوگی وہی بلحاظ پہلے ذرہ کے دوسرے ذرہ کی سرعت منتسب کہلاوی گی +

(۶۴) آ اور ب دو ذرہ ج د خط پر

ج ——— آ ——— ب ——— د

جدا گانہ سرعت یکسان گ اور گَ سے ایک ہی سمت مین حرکت کر رہے مین ذرہ آ کے لحاظ سے ذرہ ب کی سرعت منتسب معلوم کرنی ہے - فرض کرو کہ دونو ذرون پر سمت د ج مین سرعت گ لگائی جاوے - تو اُس سے اُنکی سرعت منتسب مین کچھ فرق نہ آویگا - مگر اس سرعت کے لگانے سے ذرہ آ ساکن ہوگا اور ذرہ ب سمت ج د مین سرعت گَ - گ کے ساتھ حرکت کرتا رہیگا - یعنے اگر ذرہ آ کی نسبت ذرہ ب کی سرعت منتسب م ہو تو م = گَ - گ

واضح ہو کہ اگر گ سرعت گَ سے مقدار مین زیادہ ہو تو م منفی ہوگا یعنے اس سرعت منتسب کے سمت د سے ج کی طرف ہوگی - پس تو یہ معنی ہوئے کہ ذرہ ب رفتہ رفتہ ذرہ آ کے نزدیک ہوتا جاویگا اسلیے اُکی لحاظ سے ذرہ ب کی حرکت د سے ج کی طرف مفہوم ہوگی اور اگر گ = گَ تو م =

لیکن د لا = ب ح = اک کے اور یہ تینون خط متوازی ہے
بھی ہین اسلئے ا د = ک لا اور وہ متوازی بھی ہین (شکل ۳۴ مقالہ ا)
فرض کرو کہ اکائی وقت کا کوئی حصہ ص ہے اور خطوط اک
ب لا اور ب د پر جدا گانہ م ن ع ایسے نقطے لئے گئے کہ ام/اک
= بن/بلا = بع/بد = ص/ا پس اگر دونو ذرے اپنی اپنی
سرعتون کے ساتھ چلتے تو ص وقت کے انجام مین ذرہ ا نقطہ
م پہ اور ذرہ ب نقطہ ن پر جا پہونچتے اور اونکا فاصلہ م ن ہوتا
اور اگر ا ساکن رہتا اور ذرہ ب خط ب د پر حاصل سرعت کے
ساتھ حرکت کرتا تو ص وقت کے انجام مین ذرہ ب نقطہ ع پہ
پہونچتا اور ا سے اُسکا فاصلہ اع ہوتا - مگر بن/بلا = بع/بد
∴ ع ن متوازی ہے د لا کا اور اسی لئے اک کا بھی
پھر عن/لاد = بن/بلا (متناسب مثلثون کے اصول سے) اور
بن/بلا = ام/اک ∴ ن ع = ام اور چونکہ یہ دونو آپسمین متوازی
ہین اسلئے اع = م ن یعنے اس سے ثابت ہوا کہ اگر ذرہ ا ساکن
ہو اور ذرہ ب خط ب د کی سمت مین ایسی سرعت کے ساتھ جو
ب د سے تعبیر ہوتی ہو حرکت کرے تو ہر لحظہ مین اُسکا فاصلہ اور
سمت حرکت ذرہ ا سے وہی رہیگی جو اُسحالت مین رہتی اگر دونو
اپنی اپنی سرعت سے حرکت کرتے - پس ایک ذرہ کی سرعت منتسب بلحاظ
دوسری ذرہ کے معلوم کرنیکا قاعدہ یہ ہے کہ دونو ذرون پر ایک

ایک ذرہ کے حرکت منتسب بلحاظ دوسرے ذرہ کے اسطرح معلوم کی جاتی ہے -

فرض کرو

کہ ا اور ب دو ذرے بلحاظ
کسی تیسری ساکن ذرہ کے جداگانہ
ک اور گ سرعت یکسان سے
حرکت کر رہے ہین
اور خطوط اک اور ب لا ان
سرعتونکو مقدار اور سمت مین تعبیر
کرتے ہین - یعنے ایک اکائی
وقت مین جب ذرہ ا نقطہ
ا سے چلکر نقطہ ک پر پہنچتا ہے
اسی وقت مین ذرہ ب نقطہ ب سے چلکر لا پر پہونچتا ہے - ابتدا
مین دونونکا فاصلہ اب ہے اور اوس وقت کے انجام مین ک لا ہے -

اب اگر ذرہ ا کی حرکت کی سمت کے مخالف دونون ذرون
پر ایک مشترک سرعت گ زیادہ کرین تو ظاہر ہے کہ انکی سرعت
منتسب وہی رہیگی جیسی کہ پہلے تھی - اس سرعت کے زیادہ کرنے
سے ذرہ ا تو ساکن ہوگیا اور ذرہ ب کی سرعت مقدار اور سمت مین
متوازی الاضلاع لا ح کے وتر سے تعبیر ہوگی اسلئے اکائی وقت
کے انجام مین ذرونکا فاصلہ ا د ہوگا ٭

ساکن ہے یا متحرک - پس جب ہم کہتے ہین کہ کوئی ذرہ حرکت کرتا ہے تو ہماری مراد ہوتی ہے کہ اُسکی حرکت بلحاظ کسی دوسرے مقام کے ہے جسکو کہ ہم اُسوقت ساکن فرض کر لیتے ہین یعنے اُس ذرہ سے جسکو ہم ساکن فرض کرتی ہے دوسرے ذرہ کے فاصلہ اور سمت کے تبدیلون سے اسکی حرکت کا قیاس کرتے ہین

(۶۲) حرکت منتسب کے مقدار کو سرعت منتسب کہتے ہین - سرعت منتسب کے مختصر تعریف یہ ہے کہ ذرہ آ کے لحاظ سے ذرہ ب کے سرعت منتسب گ وہ سرعت ہے کہ اگر ذرہ آ ساکن رہتا اور ذرہ ب سرعت گ سے چلتا تو ہر لحظہ مین اون دونو نکا فاصلہ اور انکے درمیان کے خط کی سمت ویسے ہی رہتی جیسکہ اُنکی اپنی اپنی علحدہ سرعتون کے ساتھ چلنے سے ہوتی -

(۶۳) تعریف مذکورہ بالا سے معلوم ہوگا کہ اگر دو متحرک ذرونمین کوئی مشترک سرعت موجود ہو تو وہ سرعت مشترک اُنکی سرعت منتسب پر کچھ اثر نکریگی مثلاً جیسے کہ مثال مذکورہ بالا مین ریل کی حرکت دونوا دمیونمین مشترک ہے اسلئے ریل کا متحرک یا ساکن ہونا اُنکی سرعت منتسب پر کچھ اثر نہین کرتا ہے - اسیطرح زمین کی حرکت اُن تمام اشیاء کے لئے جو اُسکی سطح پر ہین حرکت مشترک ہے اسلئے اُن اشیاء کی ایک دوسرے کے ساتھ جو سرعت یا حرکت منتسب ہے وہ ویسی ہی رہتی ہے جیسے کہ اگر زمین ساکن رہتے

جب تک کہ وہ تبدیلی کسی اور مقام کے ساتھ ملحوظ نہ ہو مثلاً - فرض کرو کہ دو شخص کسی ریل پر سوار ہین - جب ریل چلتی ہے تو اُن دونون کے حرکت ایک ہی ہے اگر وے صرف ایک دوسرے کی حرکت پر خیال کرین تو انمین سے ہر ایک کو معلوم ہوگا کہ دوسرا شخص ساکن ہے کیونکہ انکی باہمی تبدیلی مقام کچھ نہین ہے لیکن بلحاظ کسی اور شے کے جو کہ ریل سے باہر ہے وہ دونو متحرک معلوم ہوگئے - اب خیال کرو کہ چلتی ہوئی ٹرین مین ایک شخص اُمین سے بیٹھا ہوا ہو اور دوسرا گاڑی کے ایک کنارہ سے دوسرے کنارہ کی طرف حرکت کرے تو بلحاظ پہلے شخص کے یہ چلنے والا شخص حرکت کرتا ہوا معلوم ہوگا -

کسی ایک متحرک ذرہ کے لحاظ سے دوسری ذرہ کی حرکت کو حرکت منتسب کہتے ہین *

(٦١) واضح ہو کہ دنیا مین جہان کہین حرکت نظر مین آتی ہے وہ حرکت منتسب ہے حرکت مطلق کہین دیکھنے مین نہین آتی - فرض کرو کہ ہم چلتے ہوئی ٹرین مین یعنے گاڑی کے ایک کنارہ سے دوسرے کنارہ کی طرف چلین - تو ہماری حرکت بلحاظ اُس کنارہ کے ہوئی جہان سے ہم نے چلنا شروع کیا - مگر چونکہ ریل ساکن نہین اسکے باہر کے کسی درخت وغیرہ کے لحاظ سے وہ ریل متحرک ہے پھر وہ درخت وغیرہ بھی زمین کے ساتھ اُسکی روزانہ اور سالانہ حرکت مین شامل ہے جو حرکتین بلحاظ آفتاب کے ہین - اور یہ بھی تحقیق نہین کہ خود آفتاب

* اسکو بتغیر مین حرکت اضافی و حرکت متعلق بھی کہتے ہین ۱۲

اور اوس مرکز سے م کا جسقدر فاصلہ ہے اُسکے متناسب ہے - اور یہ
ہی ظاہر ہے کہ جس عرصہ مین ذرہ آ نقطہ لا سے شروع ہوکر دائرہ
کا ایک پورا چکر لگاتا ہے اُسی عرصہ مین نقطہ م ہی نقطہ لا سے
شروع ہوکر اور تمام قطر لا لاَ پر حرکت کر کر پھر اُلٹا اسی خط مین نقطہ
لا پر لوٹ آتا ہے - اس سے ثابت ہوا کہ جب کسی ذرہ کے اسراع
کے سمت ہر لحظہ مین کسی خاص نقطہ کی طرف ہو اور اُسکی مقدار اُس
فاصلہ کے متناسب ہو جو ذرہ کا اس نقطہ سے ہی تو ذرہ اُس نقطہ خاص کی
دونو جانب ایک خط مین اس طرح سے حرکت کرتا رہیگا کہ نقطہ خاص کی ہر دو
طرف ذرہ کے فاصلات طویلہ برابر ہونگے - اس طرح نقطہ کی ایک
جانب کی حد سے دوسری جانب کی حد تک جانے کو جنبش
کہتے ہین اور اُسمین جو وقت صرف ہوتا ہے اُسکو وقت جنبش
بولتے ہین پس یہان نقطہ م کا وقت جنبش برابر ہے اُس وقت
کے جو دائرہ پر ذرہ آ کے ۱۸۰ درجہ گھومنے مین صرف ہوتا ہی یعنے

$= \frac{\pi\,ی}{گ}$ .... (موجب حد ۵۷)

سرعت منتسب

(۶۰) بیان ہوچکا ہے کہ ذرہ کی تبدیلی مقام کے مقدار کو اُسکی
سرعت کہتے ہین - مگر ذرہ کے مقام کی تبدیلی کا قیاس نہین ہوسکتا

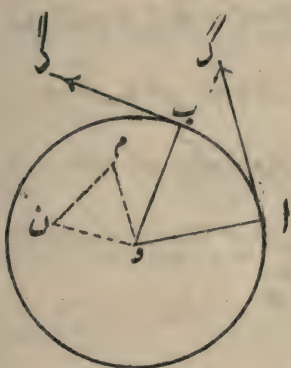
∴ ذرہ کا اسراع یعنے اکائی وقت مین سرعت کی تبدیلی = $\frac{گ^۲}{ر}$

ظاہر ہے کہ اگر صَ نہایت قلیل ہو یعنے مقام آ و بَ بہت نزدیک ہون تو خط وَمَ اور ونَ کے درمیان کا زاویہ نہایت قلیل ہوگا اور خط نَ مَ، وَمَ پر عمود ہوگا - لیکن وآ بھی وَمَ پر عمود ہے اسلیئے ثابت ہوا کہ مقام آ پر ذرہ کے اسراع کی سمت او ہے یعنے مرکز کی طرف ہے

اگر رسّی کے ایک سرے کو قائم کرکر اور دوسرے سرے مین ایک گیند باندہ کر دائرہ پر یکسان سرعت سے چکر دیا جاوے یا کہ کسی کولہو کا بیل اُسکے گرد یکسان سرعت سے حرکت کرے تو یہ حرکتین اُسی حرکت کی مثالین ہین جسکا ہم نے اوپر ذکر کیا ہے - ان صورتون مین یہ ظاہر ہے کہ بیل ہر ایک لحظہ مین ایک خط مستقیم مین چلنے کی کوشش کرتا ہے مگر ہر لحظہ مین اُس لکڑی یا رسّی جسکے ذریعہ سے وہ کولہو سے بدہا ہوا ہے اُسکو کولہو کی طرف کھینچتی ہے اور اُسکا نتیجہ یہ ہوتا ہے کہ بیل دائرہ مین حرکت کرتا ہے یہان بیل کا اسراع کی سمت دائرہ کے مرکز کی طرف ہے - اگر ایسا نہ ہوتا تو بیل سیدھا خط مستقیم مین حرکت کرتا -

(۵۹) فرض کرو کہ حد ۵۸ کی شکل مین نقطہ ا سے آمَ ولاَ پر عمود کہینچا گیا ہے تو اُس حد مین ثابت کیا گیا ہے کہ نقطہ مَ کا اسراع محور ولاَ پر = - گ ط جم ھ = - $\frac{گ^۲}{ر^۲}$ × وم یعنے نقطہ م کا اسراع دائرہ کے مرکز کی طرف ہے

پس اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ذرہ کے اسراع کی سمت ہر لحظہ مین دائرہ کے مرکز کی طرف ہے - اور یہ بات ہم پہلے سے بھی معلوم کر سکتے تھے کیونکہ ذرہ کے سرعت دائرہ پر یکسان ہے اسلئے اسکے اسراع کی سمت ہر لحظہ مین عمود مماس کی سمت مین ہوگی جو کہ اس خاص صورت مین (یعنے دائرہ کے) مرکز کی طرف ہوتی ہے . . . . (دیکھو حد ۵۱)

یہ دعوی جو حد ۵۸ مین بیان کیا گیا ہے صورت ذیل سے بھی ثابت ہوسکتا ہے- دائرہ کے مرکز و سے دو خط وم ون ایسے کھینچو جو ذرہ کے ا اور ب مقام پر کی سرعتونکو سمت اور مقدار مین جداگانہ تعبیر کرین - چونکہ دائرہ پر ذرہ کی سرعت یکسان ہے اسلئے

وم = ون اور بموجب حد ۴۹ کے یہ معلوم ہے کہ خط من ذرہ کے مقام ا سے مقام ب پر جانے مین سرعت کی تبدیلی کو تعبیر کرتا ہے اور اگر ذرہ کو اس فاصلہ چلنے مین ص وقت صرف ہوا ہو تو

اب = گ ص اور θ = زاویہ اوب = $\frac{\text{اب}}{\text{ر}}$ = $\frac{\text{گ ص}}{\text{ر}}$

مگر چونکہ زاویہ اوب = م و ن ∴ م ن = ۲ وم × جب $\frac{\text{م و ن}}{۲}$ =

۲ گ $\frac{\theta}{۲}$ = گ θ = $\frac{\text{گ}^{۲}\ \text{ص}}{\text{ر}}$

= -گ جب (θ + θَ) + گ جب θ = -گ (جب θ جم θَ
+ جم θ جب θَ - جب θ) = -گ θَ جم θ = -گ طصَ جم θ
(کیونکہ θَ نہایت قلیل ہے اسلئے جب θَ = θ اور جم θَ = ۱)

اس مساوات سے عیاں ہے کہ ولاَ محور کے متوازی اسراع یعنی اکائی
وقت مین سرعت کی تبدیلی = -گ ط جم θ .... (بموجب حد ۲۰)
اسی طرح صَ وقت مین. وی محور کے متوازی سرعت کی تبدیلی =
گ (جم θ × جم θَ - جب θ × جب θَ - جم θ) = -گ θَ جب θ
= -گ طصَ جب θ
∴ اسے محور کے متوازی اسراع = -گ ط جب θ
∴ ذرہ کے اسراع واقعی = √((-گ ط جم θ)^۲ + (-گ ط جب θ)^۲)
= گ ط

لیکن گ = ط ر .... (حد ۵۵)
∴ اسراع واقعی = ر ط^۲ = گ^۲/ر
اور اگر دائرہ کے محیط پر ذرہ کا وقت گردش = ک ہو
تو اسراع واقعی = ۴ ر گ^۲ / ک^۲
فرض کرو کہ اسراع واقعی کے سمت ولاَ محور کے ساتھہ زاویہ φ بنادے تو مساوات مذکور
سے ظاہر ہے کہ مس φ = (-گ ط جب θ)/(-گ ط جم θ) = مس θ ...... (بموجب حد ۵۴)
∴ φ = θ یا ۱۸۰ + θ

فرض کرو کہ نقطہ و دایرہ کا مرکز ہے اور ولا اور و ء دو محور

علی القوایم ہین۔

چونکہ دایرہ پر ذرہ کی سرعت یکسان ہے اسلئے بلحاظ نقطہ و کے اوسکی

سرعت الزاویہ بہی یکسان ہے اور فرض کرو کہ وہ ط سے تعبیر ہوتی ہے

اور فرض کرو کہ ذرہ ولا سے چلکر ص وقت کے اخیر مین نقطہ ا پر

پہونچا۔ اور اوسکی بعد ص' وقت کے اخیر مین جو مقدار مین بہت کم ہی

نقطہ ب پر پہونچا۔ تو ظاہر ہے کہ جب ذرہ نقطہ ا و ب پر ہے تو اوسکی

حرکت کی سمت جداگانہ اون خطوط مماس مین ہے جو کہ اون نقطون

سے دایرہ پر کہنچی گئی ہین

فرض کرو کہ زاویہ ا ولا = θ اور زاویہ ا و ب = θ'

تو θ = طص - اور θ' = ط ص' ....(حد ۸۴)

نقاط ا و ب پر سرعت گ کو محورون کے متوازی منفصل کرو تو محور و لا کے

متوازی اجزاء منفصلہ جداگانہ = -گ جب θ اور -گ جب $(\theta + \theta')$

اور محور و ء کے متوازی اجزاء منفصلہ جداگانہ گ جم θ اور گ جم $(\theta + \theta')$

محور ولا کے متوازی اجزا اسلئے منفی ہین کہ اونکی سمت

لا سے و کے طرف ہے۔

اسلئے ظاہر ہے کہ ولا محور کے متوازی سرعت کے تبدیل

ص' وقت مین

گیا - اب چونکہ ذرہ کی سرعت دایرہ پر یکسان ہے - اسلئے اب = گ

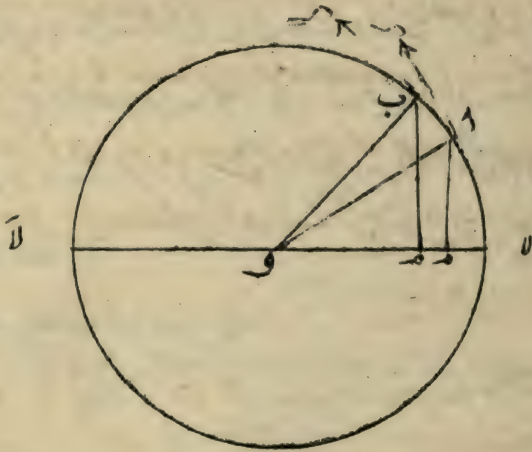
- لیکن اوسی وقت مین ذرہ ا بلحاظ و کے زاویہ ا و ب بناتا ہے اسلئے

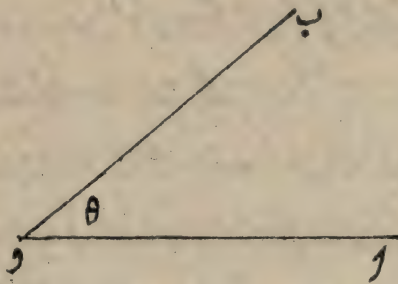
ا و ب = ط - مگر ط = اب / وا = گ / ر ∴ گ = ط ر

(۵۷) ذرہ کا محیط دایرہ پر کسی خاص مقام سے چلکر اور تمام اوس دایرہ کے چکر لگانے کے بعد اوسی مقام پر لوٹ آنے مین جو وقت صرف ہوتا ہے اوسکو دایرہ کا وقت گردش کہتی ہین اوسوقت مین خط و ا کے سمت ۲π یعنی ۳۶۰ درجہ گھوم آتی ہے اگر ک اوسکی وقت گردش کو تعبیر کرے

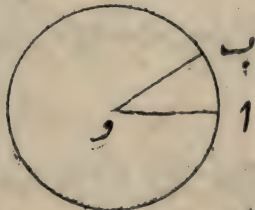
تو ک = ۲π ر / گ = ۲π / ط

اور ط = ۲π / ک

(۵۸) کوی ذرہ دایرہ مین سرعت یکسان گ سے چلرہا ہے - کسی خاص لحظہ مین اوسکی اسراع کے سمت اور مقدار معلوم کرو

السّزاویہ ماپا جاویگا - اور جبکہ غیر یکسان ہو تو کسی لحظہ مین اوسکی ماپنے کے لئے اوس لحظہ سے لیکر اکائی وقت تک سرعت الزاویہ کے تبدیل کو یکسان فرض کرلینا چاہیئے - اور ایسا فرض کرنے مین اوس اکائی وقت مین سرعت زاویہ کے تبدیلی کے جو مقدار ہو وہی اوس لحظہ مین ہراع الزاویہ کو تعبیر کریگی - واضح ہو کہ تبدیلی سے مراد زیادتی یا کمی دونو ہین

(۵۵) فرض کرو کہ و ا کے سرعت الزاویہ یکسان ہے اور مقدار مین ط سے تعبیر ہے تو ہمارے مراد یہہ ہے کہ اکائی وقت مین خط و ا ط زاویہ بناتا ہی

اس حساب سے ص وقت مین وہ خط ط × ص زاویہ بناویگا - اسلئے اگر یہہ زاویہ θ سے تعبیر کیا جاوے تو θ = ص × ط

(۵۶) کوئی ذرہ کسی دایرہ پر سرعت یکسان گ سے چلرہا ہے بلحاظ اوس دایرہ کے مرکز و کے ذرہ کے سرعت الزاویہ معلوم کرو

فرض کرو کہ دایرہ کا نصف قطر ر ہے اور ذرہ کی سرعت الیناقیہ گول ناپ مین مقدار ط ہے

اور فرض کرو کہ شروع سے اکائی وقت کی انجام مین ذرہ ب پر پہونچے

جبکہ برابر وقت مین یا اوسوقت کے برابر حصون مین زاویہ لا وا کی
مقدار تبدیلی برابر ہو تو سرعت الزاویہ یکسان ہوگی اور اگر اسکی برعکس ہو
تو غیر یکسان

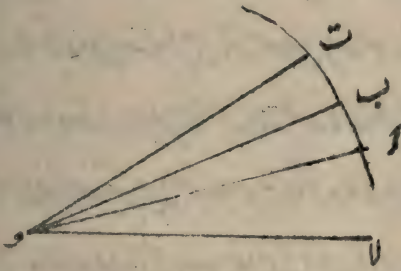
غیر یکسان سرعت الزاویہ بہی دو قسم کی ہوتی ہے جبکہ سرعت الزاویہ کی تبدیلی
برابر وقت مین برابر ہو تو اوس تبدیلی کو یکسان اسراع الزاویہ کہینگی اور
جب ایسا نہو تو غیر یکسان اسراع الزاویہ

(۴۵) سرعت الزاویہ یا اسراع الزاویہ کے ماپنے کا طریقہ بعینہٖ ویساہی ہے
ہی جیساکہ سرعت یا اسراع کے لئے طریقہ پیچھے بیان کرچکی ہین - یعنی
جبکہ سرعت الزاویہ یکسان ہو تو اکائی وقت مین زاویہ لا وا کی تبدیلی مین
اکائی زاویہ کے جسقدر تعداد ہوگی وہی تعداد سرعت الزاویہ کو تعبیر کریگی
مثلاً ہم کہتی ہین کہ کسی ذرہ کی سرعت الزاویہ فی منٹ ۱۰ درجہ ہے تو ہمارے
مراد یہ ہوگی کہ ایک منٹ مین ایک درجہ تبدیلی کو ہم نے سرعت الزاویہ کے
اکائی فرض کیا تو اس حساب سے زاویہ لا وا کے تبدیلی سرعت الزاویہ کے
اکائی کا دس گنا ہے جبکہ سرعت الزاویہ یکسان نہو تو کسی لحظہ معین مین
اوسکی ماپنے کے لئے اوس لحظہ سے لیکر اکائی وقت تک سرعت الزاویہ
کو یکسان فرض کرنا چاہیے - یہہ طریقہ ویسا ہی ہے جیسا کہ ہم سرعت غیر
یکسان کے ماپنے کے لئے بیان کرچکی ہین

اسطرح سے اسراع الزاویہ جبکہ یکسان ہو تو اکائی وقت مین سرعت
الزاویہ کے تبدیلی کے مقدار جسقدر ہوتی ہے اوس سے اسراع

باب پنجم

سرعت الزاویہ اور اسراع الزاویہ کے بیان مین

(۵۲) فرض کرو کہ کوی ذرہ ا کسی خط مستقیم یا خط منحنی ا ب ت مین حرکت کر رہا ہے - کسی نقطہ و سے ولا ایک خط کہنچا گیا ہے

جب کہ ذرہ ا ب ت پر حرکت کر رہا ہے تو نقطہ و سے اوسکی سمت متواتر وقتون مین وا - و ب - و ت وغیرہ ہے

اس سے ظاہر ہے کہ زاویہ لا و ا ہر لحظہ بدلتا جاویگا - کسی خاص اکائی وقت مین اس زاویہ کی مقدار تبدیلی کو بلحاظ نقطہ و کے ذرہ کے سرعت زاویہ کہینگے - واضح ہو کہ اس قسم کے سرعت کے ملپنے کے لئے ذرہ کا فاصلہ نقطہ و سے معلوم کرنا ضرور نہین اگر دو ذرون کے فاصلے نقطہ و سے مختلف ہون تو بہی اونکے سرعت زاویہ کو برابر کہا جائیگا بشرطیکہ بلحاظ نقطہ و کے اونکے سمت کے تبدیلی کے مقدار برابر ہو

(۵۳) سرعت الزاویہ یکسان یا غیر یکسان ہو سکتی ہے

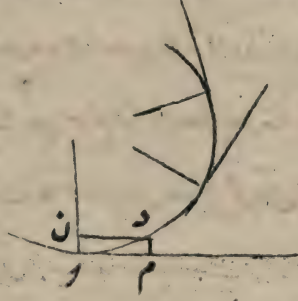
دو چند سرعت سے اوسنی کشتی چلائے تو بتلاؤ کہ ناؤ کو کس سمت مین
چلاوے جو اوس مقام پر جہاں کہ جانا چاہتا ہے پہونچ جاوے

(جواب) ندی کے بہاو کے سمت سے ۱۲۰° درجہ کا زاویہ بنا کر

(۲) کوی شخص چاہتا ہے کہ دریا سے سیدہا تیر کر اوترے اور چوڑائی دریا کے
ا تہی جبکہ وہ دوسری کنارہ پر پہونچا تو اوسنی معلوم کیا کہ جس جگہہ وہ
اترنا چاہتا تہا اوس سے ب فاصلہ پر دریا کے نیچی آن پڑا ہے۔ تو ثابت
کرو کہ اگر وہ اوسی خط مین جسمین گیا تہا آنا چاہیے تو اوسکو چاہی کہ دریا سے
ایک θ زاویہ بنا کر چلی تا کہ مس (۴۵ − θ/۲) = ب/ا

(۳) دو ذرے اپنے علیحدہ علیحدہ سرعت یکسان سے ایک ہی سطح پر
دو خطوط مستقیم مین چلرہے ہین اگر دونون ذرون کو ایک خط مستقیم سے
ملایا جاوے اور اوس خط مین ایک ایسا نقطہ لیا جاوے جو اوسکو
متناسب حصون معین مین تقسیم کرے تو وہ نقطہ بہی ایک خط مستقیم مین
حرکت کریگا

سمت مین ہوتا ہے
شکل مندرجہ ذیل سے اوراچھیطرح معلوم ہوجاویگا کہ ذرہ کے حرکت خط منحنی مین ان دوقسمون کے اسراعون کے ساتھ کسطرحپر ہوتی ہے

ن د
و م

اس شکل مین ہر لحظہ مین ذرہ کے دو سرعت موجود ہین - اگر اوسکی سرعت فقط خط مماس مین ہوتی تو وہ خط مستقیم پر حرکت کرتا رہتا - لیکن جب وہ خط مماس مین حرکت کرنے کو مایل ہوتا ہے تو اوسوقت مین ایک اور دوسری سرعت کے ساتھ خط عمود مماس پر بہی حرکت کرنے کو مایل ہوتا ہے - اور نتیجہ ان دونون میلان کا یہہ ہوتا ہے کہ متوازی الاضلاع سرعت کے قاعدہ سے ذرہ اون دونو سمتون کے بیچ مین کسی خاص سمت حرکت کرتا ہے اور ہر لحظہ ایسی صورت ہونے کے سبب سے اوسکا راہ حرکت ایک خط منحنی مین ہوجاتا ہے

سوالات باب چہارم

(۱) کوی ملاح دریا کے ایک کنارہ پر کے کسی خاص مقام سے دوسری کنارہ پر اوس مقام کے عین مقابل مین جانا چاہتا ہے - اور دریا کے بہاو کے

سے کسی خط منحنی مین حرکت کرے تو وہان سرعت کی مقدار کی تبدیلی کچہہ نہوگی اور فقط سمت ہی کے تبدیلی سے کل تبدیلی پیدا ہوتی ہے - لیکن جبکہ ذرہ غیر یکسان سرعت سے خط منحنی مین حرکت کرے تو وہان مقدار اور سمت دونو کی تبدیلی کل تبدیلی کے باعث ہین لھذا اسراع کے تعریف عام طور پر اسطرح ہے - ذرہ کی سرعت کے اکائی وقت مین کل تبدیلی کو (خواہ ایک باعث سے ہو یا دونو سے جیسا کہ اوپر بیان کیا گیا) - اسراع کہا جاتا ہے واضح ہو کہ جو تعریف اسراع کی بیان کی گئی ہے اوس تعریف سے جو کہ حد ۲۹ مین بیان ہوئی ہے بر خلاف نہین ہے - سرعت کی مقدار اور سمت کے تبدیلیون سے جو کل تبدیلی حاصل ہوتی ہے اوسکو اسراع کہتی ہین اسلئے جہانکہ سرعت کے سمت مین کچہہ تبدیلی نہین ہے وہان اکائی وقت مین سرعت کی مقدار ہی کے تبدیلی کو اسراع کہنا درست ہے

(۵۱) - بیان مذکورہ بالا سے ظاہر ہے کہ ذرہ کی راہ حرکت مین کسی مقام پر اوسکا واقعی اسراع دو اسراعات جزوی کا حاصل ہے یعنی اول وہ اسراع ہے جو کہ اوس مقام پر سرعت کی مقدار کے زیادتی سے ہوتی ہے اور جسکی سمت اوس مماس مین ہے جو راہ حرکت مین اوس مقام سے کھینچا گیا ہے اور دوم وہ اسراع ہے جو کہ سرعت کے تبدیلی سمت سے پیدا ہوتا ہے اور جسکی سمت مماس مذکورہ بالا کے عمود مین ہے - جبکہ ذرہ یکسان سرعت سے خط منحنی مین حرکت کرے تو وہان سرعت کی مقدار مین کچہہ تبدیلی نہوتی اور فقط سمت مین تبدیلی ہونے سے اسراع خط مماس کے عمود کے

دوسری مقام پر جانے سے سمت مین کسیطرح کے تبدیلی نہین ہوتی۔
پس ایسی حالت مین نقطہ ا اور ب (شکل مذکور مین) ایک ہی خط مستقیم مین
ہونگی اور بعض صورتون مین یہہ بھی ممکن ہے کہ سرعات تغیر شدہ بہ
و ا اور و ب کے مقدار اور سمت ایسی ہو کہ سرعت و ا کے و لا محور
پر جزو منفصلہ کے تبدیلی منفی ہو یعنی برعکس سمت مین ہو یا یہہ کہو
کہ و م و مَ سے بڑا ہو لیکن مختلف حالتون مین علیحدہ شکلین بناکر دیکھنے
سے معلوم ہوگا کہ تبدیلی کے مقدار اور سمت معلوم کرنیکے لئے جو
قاعدہ ہمنی اوپر بیان کیا ہے وہ ہر ایک حالت پر درست آویگا

(۵۰) ہمنی حد ۱۹ اور ۲۰ مین جو معنی اسراع کی بیان کئی ہین وہ
فقط اوسی حالت مین درست ہین جبکہ ذرہ خط مستقیم مین حرکت کرے
مگر جبکہ ذرہ کے حرکت خط منحنی مین ہوگی تو وہان اسراع کے معنی
اور طرحپر لئے جاتی ہین

دفعہ ۴۹ مین بیان کیا گیا ہے کہ ذرہ کی ایک مقام سے دوسری مقام
پر جانی مین سرعت کے تبدیلی کے مقدار اور سمت کسطرحپر دریافت ہوتی
ہے۔ طالب العلم کو معلوم ہوگا کہ اس تبدیلی کے پیدا ہونے کے
دو باعث ہوسکتی ہین۔ یعنی (اول) ذرہ کی سرعت کے مقدار کی تبدیلی
اور (دوم) اوسکی سمت کے تبدیلی۔ جس حالمین کہ ذرہ کی حرکت خط
مستقیم مین ہو تو وہان سرعت کے سمت ہمیشہ یکسان رہتی ہے اسلئے فقط
مقدار ہی کے تبدیلی کو کل تبدیلی سمجھنے چاہیئے۔ اور اسیطرح جبکہ ذرہ یکسان سرعت

فرض کرو کہ خط و ا جو کہ نقطہ معین و سے کہنچا گیا ہے ذرہ کی مقام
اول پر کے سرعت کو مقدار اور سمت مین تعبیر کرتا ہے اور اسیطرح
خط و ب اوسکی دوسری مقام پہ کے سرعت کو مقدار اور سمت مین تعبیر
کرتا ہے ۔ ان سرعات و ا اور و ب کو دو معین محورونین منفصل کرو
یعنی و م اور و ن و ا کے جزو ہین ۔ اور و مَ اور و نَ و ب کی
جزو ہین اس سے ظاہر ہے کہ ذرہ کی اول مقام سے دوسری مقام
پر جانی مین سرعت جزو منفصلہ و م کے تبدیلی خط م مَ سے تعبیر ہوتی
ہے ۔ اور اسیطرح سرعت جزو منفصلہ و ن کے تبدیلی خط ن نَ سے
تعبیر ہوتی ہے یعنی ا س اور ا ح جو کہ جدا گانہ م مَ اور ن نَ کے
برابر ہین ان تبدیلیون کو تعبیر کرتی ہین اسلئے متوازی الاضلاع س ح کا
وتر ا ب سرعت کے واقعی تبدیلی کو مقدار اور سمت مین تعبیر کرتا ہے
اسلئے اگر ہمکو معلوم کرنا ہو کہ ایک مقام سے دوسری مقام پر جانی مین
ذرہ کی سرعت مین کیا تبدیلی ہوئی تو اوسکی سلئے قاعدہ یہہ ہے کہ سطح پر
کسی نقطہ سے دو خط کہینچی جاوین جنمین سے ایک ذرہ کے اول مقام کے
سرعت کو مقدار اور سمت مین تعبیر کرے اور دوسرا خط ذرہ کے دوسری
مقام کے سرعت کو ۔ اور ان دونو خطو نکی اخیر کے سرونکو ملانی سے
جو خط پیدا ہوگا وہ ذرہ کے سرعت کے واقعی تبدیلی کو مقدار اور
سمت مین تعبیر کریگا

واضح ہو کہ اگر ذرہ خط مستقیم مین حرکت کرے تو اوسکی ایک مقام سے

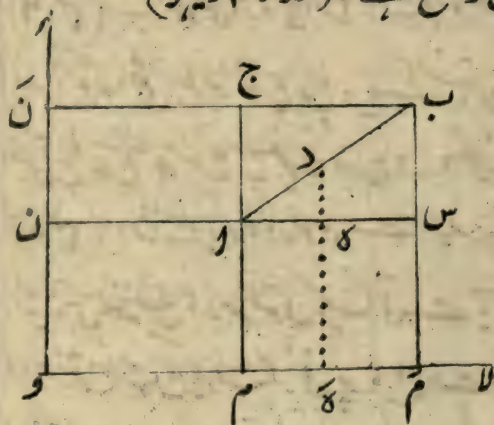
کرتا ہے - یعنی ذرہ ایک اکائی وقت مین یکسان حرکت سے ا ب
فاصلہ طے کرتا ہے - ولا اور و د دو محور علی القوایم ہین - شکل سے ظاہر
ہوگا کہ سرعت ا ب کے اجزای منفصلہ جو کہ محور ہای مذکورہ کے متوازی ہین -
خطوط اَس اور ا ج سے تعبیر ہوتی ہین - یا م مَ اور ن نَ سے
تعبیر ہوتی ہین جو کہ جداگانہ ا س اور ا ج کے برابر ہین فرض کرو کہ اکائی
وقت کے کسی حصہ یعنی $\frac{1}{\text{ص}}$ کے اخیر مین ذرہ نقطہ د پر واقع ہے اور نقطہ
د سے خط د ہ ہَ خط د ب کے متوازی کھینچا گیا ہے

اب مثلث اَ د ہ مثلث ا ب س کے ہمیشہ متناسب ہے - اسلئے

$$\frac{\text{ا ہ}}{\text{ا س}} = \frac{\text{ا د}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{ص}}{1} \therefore \frac{\text{م ہَ}}{\text{م مَ}} = \frac{\text{ص}}{1} \therefore \text{م ہَ} = \text{م مَ ص}$$

اس مساوات سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر ذرہ ا کے حرکت اَب پر یکسان ہو
تو نقطہ م کے حرکت بہی محور ولا پر یکسان ہو گی - (دیکھو حد ۱۱)
واضح ہو کہ اسراع یکسان پر بہی حد مذکورہ صادق آتی ہے

(۴۹) کوی ذرہ ایک سطح پر کسی طرف کسی سرعت سے حرکت کر رہا ہے - تو معلوم کرو کہ اپنی راہ حرکت مین کسی خاص مقام سے دوسری خاص مقام تک جانی مین اوس ذرہ کی سرعت کی مقدار اور سمت مین کیا تبدیلی ہو گی

اوس سرعت یا اسراع کو اسطرح خیال کرسکتی ہین کہ وہ دو سرعات
جزوی یا دو اسراعات جزوی کا حاصل ہے جو کہ دو معین سمتون مین واقع
ہین ان دو سرعات جزوی یا اسراعات جزوی کے درمیان کے زاویہ کو
جتنا چاہین خیال کرسکتی ہین - لیکن اوس زاویہ کو زاویہ قایمہ یعنی ۹۰ درجہ کا
زاویہ فرض کرنے سے مطلب کے سمجھنے کے لئے بہت آسانی ہوجاتی ہے -
اسلئے سرعت یا اسراع کو دو محور علی القوایم مین منفصل کرتی ہین
واضح ہو کہ جس جگہہ سرعت یا اسراع کے منفصل کا لفظ مستعمل ہوگا
(اگر برعکس اوسکی بیان نہ کیا جاوے) تو اوس سے یہہ مراد ہوگی کہ
منفصل سرعت یا اسراع ایسے دو محورون مین ہوئے ہین جنکا زاویہ در
میانی قایمہ ہے - پس سرعت گ کے دو اجزای منفصلہ جداگانہ گ جم ہ اور
گ جب ہ ہین جہان ہ وہ زاویہ ہے جو سرعت گ کے سمت اور پہلی سرعت
جزوی کے سمت کے مابین واقع ہے - (حدہ ۴۵ دیکھو)

(۴۸) اگر کسی ذرہ کے سرعت کسی لحظہ مین یکسان ہو تو اوس سرعت کے اجزای منفصلہ دو معین محورون کے متوازی سمتون مین یکسان ہونگے - فرض کرو کہ خط ا ب سرعت کے مقدار اور سمت کو تعبیر

$$\therefore \text{گ}^2 = \text{گ}_1^2 + \text{گ}_2^2 + 2\,\text{گ}_1\,\text{گ}_2 \text{ جم } \text{ہ} \quad \cdots\cdots (1)$$

$$\text{اور}\quad \frac{\text{گ}_1}{\text{جب } \text{گ}_2\text{گ}} = \frac{\text{گ}_2}{\text{جب } \text{گ}_1\text{گ}} = \frac{\text{گ}}{\text{جب } \text{گ}_2\text{گ}_1} \quad \cdots\cdots (2)$$

(۴۵) ۔ اگر سراعات جزوی ایکدوسری سے زاویہ قایمہ نبادین تو

$$\text{ہ} = 90^\circ \qquad \therefore \text{گ}^2 = \text{گ}_1^2 + \text{گ}_2^2$$

فرض کرو کہ گ اور گ$_1$ کے درمیان کا زاویہ برابر ہ کے ہے تو

$$\text{گ}_1 = \text{گ جم } \text{ہ}$$

$$\text{گ}_2 = \text{گ جب } \text{ہ}$$

$$\text{اور}\quad \frac{\text{گ}_2}{\text{گ}_1} = \text{مس } \text{ہ}$$

(۴۶) ـــ اگر کسی ذرہ کی اسراعات جزو منفصلہ ع$_1$ وع$_2$ ہون اور اسراع واقعی ع ہو تو ع$_1$ وع$_2$ وع کے نسبتین حد ۴۵ کے تشابہ ہو نگی

یعنی $\text{ع}_1^2 + \text{ع}_2^2 + 2\,\text{ع}_1\,\text{ع}_2 \text{ جم } \text{ہ} = \text{ع}^2$ وغیرہ وغیرہ

(۴۷) دفعات ۴۱ اور ۴۳ سے معلوم ہوتا ہے کہ جب کوی ذرہ ایک ہی لحظہ مین دو سرعتون یکسانی سے یا دو اسراعات یکسان سے دو مختلف سمتون میں حرکت کرنی پر مایل ہے تو اِن سرعتون یا اسراعات کے مشتمل اثر سے ایک حاصل سرعت یا حاصل اسراع پیدا ہوتا ہے چنانچہ جب کوی ذرہ کسی سرعت یا اسراع سے حرکت کرتا ہے تو ہم

بلکہ اونکو کسی خاص اکائی وقت مین سرعتون کی زیادتی تعبیر کرتی ہوئی فرض کیا جاوے تو ثبوت مین کچہہ فرق نہین آویگا - اور ذرہ کا واقعی اسراع متوازی الاضلاع کے قطر ا د سے تعبیر ہوگا

—— اسراعات غیر یکسان کے لئے یہی یہی ثبوت کافی ہے فرق صرف اتنا ہی ہوگا کہ اس حالت مین خطوط ا ب اور ا ج ذرہ کی فقط اوس لحظہ کے اسراعات کو تعبیر کرینگی کیونکہ غیر یکسان اسراع کے ماپنے کے قاعدہ سے ہم جانتے ہین کہ اوس خاص لحظہ سے ایک اکائی وقت تک سرعت کی زیادتی کو یکسان فرض کرنا چاہیے (دیکھو حد ۲۵ ع) پس قطر ا د اسحالت مین صرف خاص لحظہ مین ذرہ کی واقعی اسرا کو تعبیر کریگا

(۴۳) - تعریف - سرعات تعبیر شدہ ا ب اور ا ج کے لحاظ سے ذرہ کی واقعی سرعت تعبیر شدہ ا د کو اون سرعتون کا حاصل کہا جاتا ہے اور اس حاصل سرعت کے لحاظ سے سرعات تعبیر شدہ ا ب اور ا ج کو اجزار منفصلہ کہتے ہین - اسیطرح واقعی اسراع اور اسراعات کے اجزار منفصلہ کے معنی سمجہنے چاہین

(۴۴) - اگر کسی ذرہ کے سرعات جزوے $گ_۱$ و $گ_۲$ ہون اور اونکی سمتین ایکدوسری سے زاویہ ہ بناوین اور سرعت واقعی برابر گ کے ہو تو دفعہ ۴ کے شکل سے ظاہر ہوگا کہ

$$ا د^۲ = ا ب^۲ + ا ج^۲ + ۲ ا ب × ا ج × جم ہ$$

مین یکسان ہے (دیکھو حد ۱۱)
پس یہ ثابت ہوا کہ ذرہ کی واقعی سرعت خط ا د کے سمت مین یکسان ہے
اور مقدار مین متوازی الاضلاع کے قطر ا د سے تعبیر ہوتی ہے
(۱۴) ثبوت مذکورہ بالا سرعت غیر یکسان کے حالت مین بہی کافی ہے
کیونکہ کسی خاص لحظہ مین سرعت غیر یکسان کے مقدار اوس لحظہ سے
ایک اکائی وقت کے عرصہ تک یکسان مان لی جاتی ہے (جیسی حد
۱۳ مین بیان ہوا) پس اگر کسی خاص لحظہ مین ذرہ کی غیر یکسان سرعتین گ
اور گ ہون اور جدا گانہ خطوط ا ب اور ا ج سے تعبیر ہون تو
متوازی الاضلاع ا ب د ج کا قطر ا د ذرہ کی اوس خاص لحظہ مین واقعی
سرعت کو تعبیر کریگا ۔ مگر واضح ہو کہ اوس خاص لحظہ کے بعد ذرہ کی
سرعتون کا مقدار مختلف ہو جائیگا یعنی اوسکی واقعی سرعت کا مقدار
اور سمت ہر لحظہ مین مختلف ہوتا جاتا ہے اور اوسکی تعبیر کرنے کے لئے ہمین
نئی متوازی الاضلاع بنانے چاہیے
(۱۴) اسیطرح اگر خطوط ا ب اور ا ج کسی لحظہ مین ذرہ کی اسراعات
یکسان کو تعبیر کرین تو متوازی الاضلاع ا ب د ج کا قطر ا د
اوس لحظہ مین ذرہ کی واقعی اسراع کو تعبیر کریگا اس دعوی کو متوازی الاضلاع
اسراع کہتے ہین ۔ اسکا ثبوت حد ۴۴ کے طرح ہے
کیونکہ دفعہ ۲۰ مین ہم دکہلا چکے ہین کہ اسراع بہی سرعت کی طرح ماپا جاتا ہے
یعنی اگر خطوط ا ب اور ا ج کو ذرہ کی سرعت کا تعبیر کنندہ فرض کرین

مین نقطہ ب پر پہنچتا ہے ۔ یعنی اگر ذرہ کی سرعت صرف گ ہوتی تو
اکائی وقت کے انجام مین وہ خط د ب کی کسی مقام پر پہونچتا کیونکہ د ب متوازی
اج کے ہے ۔ اسیطرح اگر ذرہ کی سرعت یکسان صرف گ' ہوتی تو اکائی
وقت کے انجام مین خط ج د مین کسی مقام پر پہونچتا مگر چونکہ سرعتین گ و گ'
ایک ہی لحظہ مین موجود ہین ۔ اسلئے اکائی وقت کے انجام مین ذرہ نقطہ
د پر پہونچیگا کیونکہ نقطہ د خطوط ب د اور ج د کا تقاطع ہے ۔

فرض کرو کہ اکائی وقت کہ کسی حصہ ص کے انجام مین ذرہ نقطہ ا پر واقع ہے
خطوط اب اور اج پر نقاط م و ن ایسی فرض کرو کہ

$$\frac{\text{ا م}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{ا ن}}{\text{ا ج}} = \frac{\text{ص}}{1}$$

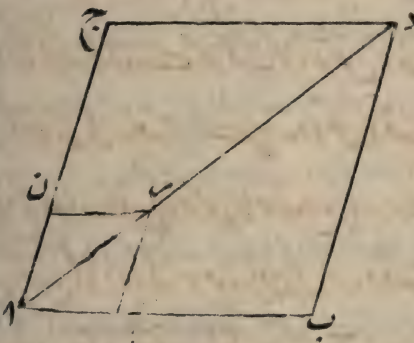
۔ اس سے ظاہر ہے کہ
اگر ذرہ سرعت گ سے حرکت کرتا تو ص وقت مین فاصلہ ام طے کرتا
اور اگر صرف گ' سرعت سے چلتا تو ص وقت مین فاصلہ ان طے کرتا
اضلاع ام اور ان پر متوازی الاضلاع ا ر بناؤ ۔ اب چونکہ ایک ہی لحظہ
مین سرعتین گ اور گ' موجود ہین پس ص وقت کے انجام مین ذرہ نقطہ ر پر
پہونچیگا ۔ لیکن چونکہ $\frac{\text{ا م}}{\text{ا ن}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا ج}}$ اسلئے قطر ا ر اور ا د ایک ہی
سیدہ مین ہونگے (م ۶ ش ۲۴) ۔ اس سے یہہ ثابت ہوا کہ ذرہ
اکائی وقت کے ہر لحظہ مین قطر ا د کے خط مین حرکت کرتا ہے

اور نیز مثلث ام ر اور ا ب د ایکدوسری کی متشابہ ہین اسلئے

$$\frac{\text{ا ر}}{\text{ا د}} = \frac{\text{ا م}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{ص}}{1}$$

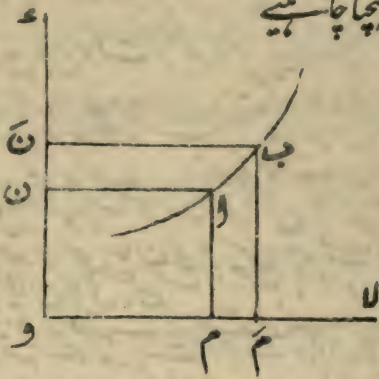
∴ ا ر = ا د ص اس سے یہہ ثابت ہوا کہ ذرہ کی سرعت سمت

محورون مفروضہ کی سمت مین معین اور نجدو کے پاؤن کی حرکتون مین اسطرح انفصال کرنا بہت مفید ہے اور علم حرکت کا ایک جزو اولے ہے - اسطریقہ کا مفصل حال بیان مندرجہ ذیل سے معلوم ہوجائیگا

(۴۰) - اگر کوئی ذرہ کسی لحظہ مین دو مختلف یکسان سرعتون سے دو مختلف سمتون مین حرکت کرنیکو مائل ہو اور اگر کسی نقطہ سے دو خطوط مستقیم اون سرعتون کو جداگانہ سمت اور مقدار مین تعبیر کرین اور اگر اندونو خطوط کو اضلاع مانکر ایک متوازی الاضلاع بنائی جاوے تو ذرہ کی سرعت واقعی بھی یکسان ہوگی جسکی سمت اور مقدار متوازی الاضلاع کے اُس قطر سے تعبیر ہونگی جو نقطہ مفروضہ سے گذرتا ہے دعوے مذکورہ بالا کو متوازی الاضلاع سرعات کہتے ہین

فرض کرو کہ کوئی ذرہ جو نقطہ ا پر مقیم ہے سرعت یکسان گ و گَ کے ساتھ ایک لحظہ مین جداگانہ اب اور اج کی سمتون مین حرکت کرنے کو مائل ہے

اور فرض کرو کہ خطوط اب اور اج جداگانہ سرعتون گ اور گَ کو مقدار اور سمت مین تعبیر کرتے ہین - اضلاع اب اور اج پر ایک متوازی الاضلاع اد بناو - سرعت گ کو خط اب سے تعبیر کرنے سے یہ مراد ہے کہ ذرہ نقطہ ا سے یکسان سرعت کے ساتھ چلکر اکائی وقت کے انجام

سرعت اور اسراع کے ناپنے اور خط مستقیم سے تعبیر کرنیکا طریقہ ہم بیشتر بیان کر چکے ہین - کسی خط منحنی مین بہی سرعت اور اسراع کے ناپنے اور تعبیر کرنیکا طریقہ وہی ہے صرف اسصورت مین تعبیر کرنیوالا خط اوس مقام کے مماس یا مماس کی متوازی سمت مین کہینچنا چاہیے

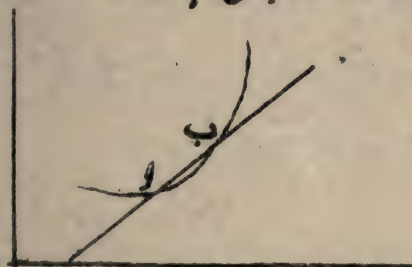
ء
نَ
ن
ب
ا
لا
و
م
مَ

۳۹ - فرض کرو کہ کوی ذرہ کسی لحظہ مین کسی خط منحنی مین کسی قسم کے حرکت سے ا سے ب کی سمت مین متحرک ہے خط منحنی کی سطح مین کوی دو محور ولا اور و ء ایکدوسری سے کوی خاص زاویہ بناتے ہوئے فرض کرو اور نقاط ا اور ب سے خطوط ا م اور ب مَ و ان اور انَ متوازی محورون مفروضہ کے کہینچو - ریاضی مین وم اور ون کو نقطہ ا کے معین و محدد کہتی ہین - نقطہ م کو پای معین اور ن کو پای محدد کہا جاتا ہے -

شکل بالا سے ظاہر ہے کہ جتنی وقت مین ذرہ نقطہ ا سے نقطہ ب تک پہونچتا ہی اوسی وقت مین نقطہ م محور و لا کے سمت مین نقطہ مَ تک پہونچتا ہی اور نقطہ ن محور و ء کے سمت مین نقطہ نَ تک پہونچتا ہے - اس سے یہہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ہم دونون محورون پر جداگانہ م اور ن کے حرکت کو تصور کرین تو خط منحنی مین ذرہ کے حرکت کا پورا پورا قیاس کیا جاسکتا ہے

خط منحنی مین کسی جسم کے حرکت کو مکمل طور پر سمجہنی کے لئے اوس حرکت کو ذرہ کے

باب چهارم

حرکت مرکب اور انفصال حرکت کے بیان مین

(۳۸) اول ہر سہ باب مین ذرہ کی حرکت صرف خط مستقیم مین تصور کی
گئی ہے - اب ذرہ کی حرکت کسی خط منحنی مین اوسکا مقدار اور اوسکی
اور چند خواص بیان کی جاینگی - جب کوی ذرہ کسی خط منحنی مین حرکت کرتا ہے
تو اوسکی سرعت کے سمت ہر لحظہ بدلتی رہتی ہے مگر کسی خاص نقطہ پر سرعت
کی سمت اوس نقطہ پر کے مماس کے سمت مین ہوتی ہے

مثلا فرض کرو کہ کسی خاص لحظہ
مین ذرہ نقطہ ا پر ہے اور
نقطہ ب ذرہ کی سمت حرکت مین
نقطہ ا سے بہت سے قریب
واقع ہے - تو ظاہر ہے کہ لحظہ مفروضہ مین ذرہ نقطہ ا سے نقطہ ب کے
طرف چلرہا ہے - مگر چونکہ ا اور ب ایکدوسری بہت ہے قریب واقع مین
پس حصہ دایرہ اب اور خط اب مین بہت ہی کم اختلاف ہے یعنی خط
اب نقطہ ا پر کے مماس کے سمت مین ہے چونکہ اس مماس کے سمت
ہمیشہ بدلتی جاتی ہے تو ہم ذرہ کے سمت سرعت کی تبدیلی مماس کی سمت کی بنی
دریافت کر سکینگی

۳۵ کوئی ذرہ یکسان اسراع ع کے ساتھ حرکت کرتا ہے اور دیکھا گیا کہ
کوئی مفروضہ فاصلہ ف طے کرنے مین اُسکی سرعت بمقدار گ بڑہی اور اوس
فاصلہ کی ابتدای اور انجام کے سرعتون کا اوسط برابر م کے ہے تو ثابت
کرو کہ گ م = ع ف

۳۶ کوئی ذرہ سرعت گ کے ساتھ اوپر کیطرف پہنیکا گیا۔ اوپر چڑہنے اور
نیچے اُترنے مین ہوا کی مزاحمت ہمیشہ کشش زمین کی مقدار کے نصف کے برابر ہے
جب ذرہ اوس مقام پر جہان سے اوپر پہینکا گیا تھا واپس آیا تو اُسکی سرعت
کی مقدار گَ رہتی تو ثابت کرو کہ گ = گَ × √۳

کرو جواب اگر گ برابر سرعت مطلوبہ کے ہو تو

$$گ^2 = \frac{س^2 ق^2}{۴} + ۲ ق ا$$

(۳۰) کسی ذرہ کی سرعت ۲۰ فٹ فاصلہ طے کرنی مین ۱۶ فٹ فی سیکنڈ سے ۴۰ فٹ فی سکنڈ ہو گئے تو اوسکا اسراع اور کل وقت حرکت دریافت کرو

جواب (۱) ۱ (۲) ۳۰

(۳۱) کسی ذرہ کی سرعت ۹ فٹ فاصلہ طے کرنے مین بڑہکر ۴ فٹ فی سکنڈ ہو گئی تو اوسکا اسراع اور کل فاصلہ طے شدہ معلوم کرو

جواب (۱) $\frac{1}{۲}$ (۲) ۲۵

(۳۲) کسی ذرہ کا اسراع اتنا ہے کہ $\frac{1}{۲}$ سیکنڈ تک حرکت کرنے مین اوسکی سرعت محصلہ اسقدر ہو جاتی ہے کہ اوسکی ساتھہ یکساں طور پر چلکر $\frac{1}{۴}$ سکنڈ مین ۴ فٹ فاصلہ طے کر سکتا ہے تو ذرہ کا اسراع کیا تھا

جواب ۳۲

(۳۳) دیکھا گیا کہ کسی ذرہ نے دو متواتر سیکنڈ مین جدا گانہ ۸۰ فٹ و ۱۱۲ فٹ فاصلہ طے کیا تو اوسکا اسراع اور کل وقت حرکت دریافت کرو

جواب (۱) ۳۲ (۲) ۴

(۳۴) کوئی جسم ایسی سرعت کی ساتھہ اوپر کیطرف مقذوف ہوا کہ جس سے وہ ۲ ق اونچائی تک بلند ہو سکتا ہے تو دریافت کرو کہ کتنی وقت کے بعد اوس جسم کی نیچی گرنے کے سرعت برابر ق کے ہو گے

جواب ۳ سیکنڈ

ایک اور جسم اوّل کے مقام گراو کے ۶۰۰ فٹ نیچی سے گرا - تو معلوم کرو
کہ دونو کتنی دیر مین اور کس مقام پر ملینگی

جواب (۱) ۶۱۹ فٹ (۲) ۷۵ء۷ سیکنڈ

(۲۶) کوی پتھر ایک کنوین مین گرا س سیکنڈ کے بعد اوسکی پانی پر پہونچ
کے آواز آئی آواز کے آنے کے سرعت یکسان ۱۰۹۰ فٹ فی سیکنڈ
ہے یعنی = ۳۴ ق تو دریافت کرو کہ پانی کے سطح کنوئین کے دہانی
سے کتنی نیچی ہے جواب اگر ن تعداد فٹ مطلوبہ ہو

تو ن + ۳۴ $\sqrt{}$ ۲ ق ن = ۳۴ ق س

(۲۷) جب کوی ذرہ مفروضہ ارتفاع سے ن فٹ گر چکا تو اوس لحظہ مین
ایک اور ذرہ اوسی اونچائی سے نیچی محذوف ہوا اور س سکینڈ کے
انجام مین اوّل ذرہ کی ساتھہ آملا تو دریافت کرو کہ دوسرا ذرہ کتنی سرعت
کے ساتھہ محذوف ہوا جواب $\frac{ن}{س}$ + $\sqrt{}$ ۲ ق ن

۲۸ - کوی ذرہ ۴۰۰ فٹ کی اونچائی سے گرا اور جب وہ ۵۰ فٹ
نیچی گر چکا تو ایک اور ذرہ ایسی سرعت سے محذوف ہوا کہ دونو سطح
زمین پر ایک ہی لحظہ مین پہونچے تو دریافت کرو کہ دوسری ذرہ کی حذف
کے سرعت کیا تہے جواب ۲۷

۲۹ کوی ذرہ کسیقدر سرعت سے اوپر کیطرف محذوف ہوا اور دیکہا گیا
کہ ذرہ کو ایک مقام پر جسکی بلندی ۱ فٹ ہے گذر جانی اور وہین
واپس آنے مین س سکینڈ لگے تو ذرہ کے پہنکنے کے سرعت دریافت

مقام سے سرعت ۲۰۰ فٹ فی سیکنڈ کے ساتھہ اوس سمت مین محذوف ہو۔ تو معلوم کرو کہ کس جگھہ اور کتنی دیر مین دونو ایک دوسری سے ملینگی

جواب (۱) ۴۸۲ فٹ

(۲) ۲٫۶ سیکنڈ

(۲۱) کوی ذرہ ایک مینار کے چوٹی سے گرا اور اوسے لحظہ مین ایک اور ذرہ اوسی مینار کے تلے سے اوپر کیطرف پہینکا گیا دونو ذری مینار کے عین وسط مین آکر ملے - تو دریافت کرو کہ دوسری ذرہ کی سرعت ابتدائے حذف کیا تہی

جواب $\sqrt{\text{ق} \times \text{طول مینار}}$

(۲۲) کوئی نیچے گرتا ہوا جسم گرنیکی اخیر سیکنڈ مین کل گرنیکی اونچائی کا $\frac{1}{\text{ن}}$ حصہ گرا تو اوسکی کل گرنے کا ارتفاع اور کل وقت گرنیکا معلوم کرو

جواب وقت گراو = $\text{ن} \pm \sqrt{\text{ن}(\text{ن}-1)}$

(۲۳) کوی نیچی گرتا ہوا جسم اپنے گرنے کے اخیر سکینڈ مین اپنی کل گرنیکی اونچائی کا $\frac{1}{2}$ حصہ گرا تو اوسکی کل گرنے کی اونچائے اور کل وقت گرنیکا معلوم کرو

جواب اونچائی = ۵٫۴ فٹ اور وقت = قریبًا $\frac{1}{2}$ ۵ سیکنڈ

(۲۴) کوی جسم سرعت ۵ فٹ فی سیکنڈ کے ساتھہ نیچی محذوف ہوا - ۱۰ سکینڈ کے بعد ایک اور جسم اوّل جسم کے ۸ گنا سرعت کی ساتھہ اوپر کیطرف محذوف ہوا تو معلوم کرو کہ کتنی دیر مین دونو ملینگے

جواب ۸۰ سیکنڈ

(۲۵) کوی جسم کسی مفروضہ بلندی سے نیچی گرا — ۳ سیکنڈ کے بعد

کریگا جواب ف + فَ + $\frac{\text{ف} - \text{فً}}{\text{۲ (س - سَ)}}$

مثالات مندرجہ ذیل کشش زمین کے باعث سے گرتی ہوئی جسمون کے حرکت کی متعلق ہین - اور سوای اون مقامون کے جہان اسکے عکس لکھا جاوے ہمیشہ اسراع برابر ۳۲ فٹ فی سیکنڈ فرض کرنا چاہئے

(۱۵) دریافت کرو کہ کوی نیچے گرتا ہوا جسم ۱۰ سیکنڈ مین کتنا فاصلہ نیچے گریگا جواب ۱۲۹۶ فٹ

(۱۶) کوی نیچے گرتا ہوا جسم اوّل و دوم و سیوم سیکنڈ مین جدا گانہ کتنا فاصلہ نیچے گرتا ہے جواب ۱۶ و ۴۸ و ۸۰ فٹ

(۱۷) کوی جسم ابتدای سرعت ۸۰ فٹ فی سیکنڈ کے ساتھہ اوپر کیطرف سمت الراس مین پہنکا گیا تو معلوم کرو کہ وہ کتنی اونچای تک چڑھ سکیگا جواب ۱۰۰ فٹ

(۱۸) قطب صاحب کی مینار کی چوٹی سے جسکی اونچای ۲۵۰ فٹ ہے کوی جسم گرا تو دریافت کرو کہ کتنی وقت مین سطح زمین پر پہونچیگا - اور یہہ بھی بتلاو کہ اگر جسم مذکور زمین پر ایک سیکنڈ مین آ پہونچے تو کتنی سرعت ابتدا سے نیچے گیا ہوگا جواب (۱) قریباً ۴ سیکنڈ (۲) ۱۳۴

(۱۹) کسی گرتے ہوئی جسم کے ۲۵۰ فٹ فاصلہ نیچے گرنے مین سرعت مصل کیا ہوگے جواب ۱۲۰

(۲۰) ایک گولی سرعت ۱۵۰ فٹ فی سیکنڈ کے ساتہہ اوپر کیطرف سمت الراس مین مقذوف ہوئی اور ایک سیکنڈ کے بعد ایک اور گولی او

کرتا ہے اور دوسری ۴ سیکنڈون مین ۴۶ فٹ - تو اوسکی سرعت
ابتدائی و اسراع دریافت کرو جواب (۱) ۱
(۲) ۲٫۵

(۱۱) کوی ذرہ سرعت ابتدای گ سے حرکت کرکے س وین
و سَ وین سیکنڈ مین جدا گانہ ف و فَ فاصلہ طے کرتا ہے
تو ن وین سیکنڈ مین کتنا فاصلہ طے کریگا

جواب گ + (ف - فَ) (ن - ۱) / ۲ (س - سَ)

(۱۲) کوی ذرہ حالت سکون سے اسراع ۸ سے حرکت کرتا ہوا
۵ سکنڈ مین ۵٫۷ فٹ فاصلہ طے کرتا ہے اور اوس وقت کے انجام
مین اوسکی سرعت محصلہ ۲۰ ہے ا سمجھہ اکائی وقت اور اکائی فاصلہ
کیا ہے جواب اکائی وقت = ۲ سیکنڈ اکائی فاصلہ = ۳ فٹ

(۱۳) کوی ذرہ کسی نقطہ مفروضہ سے اسراع ع کیساتھہ حرکت کرتا ہے
اور س سیکنڈ کے بعد ایک اور ذرہ ۸ اوسے نقطہ سے سرعت یکسان
گ سے چلا تو ثابت کرو کہ اگر گ > ۲ ع س تو دونو ذرہ ایکدوسری
سے دو دفعہ آکر ملینگے

(۱۴) کوی ذرہ حالت سکون سے اسراع یکسان کیساتھہ حرکت کرتا ہے
اور س وین و سَ وین سیکنڈ مین جداگانہ ف و فَ فاصلہ طے کرتا ہی
تو دریافت کرو کہ (س + سَ) وین سیکنڈ مین کتنا فاصلہ طے

(۶) کسی ذرہ کا اسراع سے فی منٹ بحساب ۳۰۰ گز ہے تو بتلاو کہ حالت سکون سے چلکر کتنا فاصلہ طے کرنے مین اوسکے سرعت محصلہ برابر ۳۰ فٹ فی سیکنڈ کی ہوگے

جواب ۱۸۰۰ فٹ

(۷) دیکھا گیا کہ کسی مفروضہ سیکنڈ مین ذرہ ۷ فٹ فاصلہ طے کرتا ہے اور اوس سیکنڈ کے تیسری اور چوتھی سیکنڈ مین جدا گانہ ۱۱ و ۱۷ فٹ فاصلہ طے کرتا ہے تو بتلاو آیا ذرہ کا اسراع یکسان یا غیر یکسان ہی اور اسراع کا تعداد ہے دریافت کرو

جواب (۱) یکسان (۲) ۲

(۸) کسی ذرہ کی سرعت ابتداگ ہے اور اوسکی سرعت بحساب ع اسراع کے زیادہ ہوتے ہے اگر ذرہ وقت س مین ف فاصلہ طے کرے اور اوس وقت کی انجام مین اوسکے سرعت محصلہ ل ہو تو ثابت کرو

کہ $\frac{ل - گ}{ع} = \frac{۲ ف}{ل + گ} = س$

(۹) کوی ذرہ اسراع ع سی حرکت کر رہا ہے اگر ف فاصلہ کی ابتدا اور انجام کے سرعتون کا اوسط برابر ۸ کے ہو اور اس فاصلہ کے طے کرنے مین اوسکے سرعت معقدار د سے زیادہ ہوئے ہو تو ثابت کرو کہ ۸ د = ع ف

(۱۰) دیکھا گیا کہ کوی ذرہ پہلی چار سیکنڈ مین ۲۴ فٹ فاصلہ طے

بیان اس رسالہ ابتدائی مین نہین کیا جاسکتا

مثالات باب سوم

(۱) کسی ذرہ کا اسراع ۵ ہے تو ابتدا سے کتنی وقت مین اوسکی سرعت محصلہ برابر ۲۰ کے ہوگے اگر ذرہ کی سرعت ابتدائے ۵ ہوتی تو کتنی وقت مین سرعت محصلہ برابر ۲۰ کے ہوگی جواب (۱) ۴ اکائی وقت (۲) ۳ اکائی وقت

(۲) کوی ذرہ جسکی سرعت ابتدای ۲ اہی اسراع یکسان سے حرکت کرتا ہی ابتدا سے چلکر ۸ اکائے وقت کی انجام مین اوسکی سرعت محصلہ برابر ۸۲ کے ہوتی ہے تو اوسکا اسراع دریافت کرو جواب ۱۰

(۳) کسی ذرہ کی سرعت بحساب ۳۲ اکایون اسراع کے کم ہوتی ہے کسی مفروضہ لحظہ مین معلوم ہوا کہ اوسکی سرعت ۹۶ ہے تو کتنی وقت مین ذرہ حالت سکون کو پہونچ جائیگا جواب ۳ اکائی وقت

(۴) کسی ذرہ کا سرعت ابتدائی ۱۵ ہے - اور اوسنی شروع سے ۲ اکایون وقت مین ۱۸ اکائین فاصلہ کی طے کین - تو اوسکا اسراع دریافت کرو جواب - ۶

(۵) کسی ذرہ کی سرعت ابتدائی ۱۰ ہے ۳ اکایون فاصلہ کے طے کرکے وہ سرعت ۸ حاصل کرتا ہے تو اوسکا اسراع دریافت کرو

جواب - ۶

(۸ ۲۰) تجربے سے معلوم ہوا ہے کہ جب کوئی شے اوپر سے نیچی کیطرف پہینکی جاوے یا خود گرے تو اوسکی سرعت کشش زمین کے باعث ایک یکسان اسراع سے بدلتی جاتی ہے اس اسراع کی ناپ قریباً فی سیکنڈ ۲ ۲ ۳۲ فٹ ہے - آسانی کے لئے اس خاص اسراع کو ہمیشہ حرف ق سے تعبیر کیا جائیگا

اس تبدیلی مقدار حرکت کے خواص اور اوسکی ناپنے کا طریقہ وغیرہ آئندہ بیان ہوگا - اسجگہہ اتنا ہی فرض کافی ہے کہ کشش ثقل سے کسی متحرک جسم کی سرعت بحساب ق اسراع کے زمین کے مرکز کیطرف زیادہ ہوتی ہے

پس ظاہر ہے کہ اگر ہم کسی جسم کی حرکت جو سمت الراس مین پہینکا گیا ہو یا گرا ہو معلوم کرنا چاہین تو کل نتایج جو ہمنے خصوص مذکورہ بالا مین بابت یکسان اسراع کی ثابت کر چکے ہین اسجگہہ بہی عمل مین آوینگے - فرق صرف اتنا ہی ہوگا کہ جہان ہمنے اون حدود مین اسراع کے واسطے حرف ع رکھا ہے وہان اوسصورتون مین جب جسم نیچی کیطرف گرتا ہو (+ ق) اور جب اوپر کیطرف چڑہتا ہو (- ق) رکہنا چاہیے -

اس باب کے اخیر مین بہت سے مثالین کشش ثقل کے متعلق دئی گئی ہین جن سے مختلف حالتون مین ذرہ کی حرکت کا حال معلوم ہوگا

باب چہاردہم مین ہم اوس جسم کی حرکت کا حال بیان کرینگے جو خاص سمت راس مختلف سمت مین پہینکا گیا ہو یا گرا ہو - جب ہم کہتے ہین کہ ذرہ حرکت کرتا ہے تو ہمارے مراد ہمیشہ یہہ ہوتی ہے کہ ذرہ خلا مین حرکت کرتا ہے کیونکہ ہوا کا اثر ذرہ کی حرکت مین اسقدر تبدیلی پیدا کرتا ہے کہ اوسکا

(۵) $\text{ل} = \text{گ} - \text{ع}\,\text{س}$ ∴ ابتدا سے $\frac{۲\,\text{گ}}{\text{ع}}$ وقت کی انجام مین
ذرہ کی سرعت محصلہ $= \text{گ} - \frac{\text{ع} \times ۲\,\text{گ}}{\text{ع}} = -\,\text{گ}$
اس سے ظاہر ہے کہ جب ذرہ نقطہ ۱ پر لوٹ آتا ہے تو اوسکی سرعت
عدداً ابتدای مقدار حرکت کے برابر ہوتی ہے مگر سمت مین مخالف

(۳۶) ذرہ کا وقت واپس نقطہ ۱ تک پہونچنے مین ایک اور طریقہ سے
بہی دریافت ہو سکتا ہے ہم جانتے ہین کہ س وقت مین فاصلہ طے شدہ
$= \text{گ}\,\text{س} - \frac{۱}{۲}\,\text{ع}\,\text{س}^{۲}$
نقطہ ۱ پر ذرہ کا فاصلہ طے شدہ = ۰ پس اگر ذرہ اپنا کل فاصلہ طے
کرنے اور نقطہ ۱ تک واپس آنے مین وقت س صرف کرے
تو $۰ = \text{گ}\,\text{س} - \frac{۱}{۲}\,\text{ع}\,\text{س}^{۲}$

$$\therefore \text{س} = ۰ \ \text{یا}\ \frac{۲\,\text{گ}}{\text{ع}}$$

س کی اول قیمت اوس وقت کو تعبیر کرتی ہے کہ جب ذرہ نقطہ ۱ سے حرکت
کرنیکو تیار ہے
س کی دوسری قیمت اوس وقت کو تعبیر کرتی ہے کہ جب ذرہ نقطہ ۱ سے
چلکر اپنا کل فاصلہ طے کر کے واپس نقطہ ۱ پر پہونچ جاتا ہے
اسطرح چونکہ $\text{ل}^{۲} = \text{گ}^{۲} - ۲\,\text{ع}\,\text{ف}$ جب ذرہ اپنا کل فاصلہ اصل سمت مین
طے کر چکتا ہے تو $\text{ل} = ۰$ ∴ $۰ = \text{گ}^{۲} - ۲\,\text{ع}\,\text{ف}$ ∴ کل طے شدہ
فاصلہ (ف) $= \frac{\text{گ}^{۲}}{۲\,\text{ع}}$ طالبعلم زود فہم مساواتون مذکورہ بالا سے بہت سے
نتایج خود نکال سکتا ہے جبکا اس جگہہ بیان کرنا فضول ہے

(۳) اگر گ۲ > ۲ع ف ۔ توس کے دو قیمتین ہو سکتی ہین
بموجب جبر و مقابلہ کے صورت مساوات سے معلوم ہوتا ہے کہ
دو نو قیمتین مثبت ہونگی یعنی اسصورت مین ذرہ مقام ب پر دو دفعہ گذریگا
ایک دفعہ اصل سمت مین حرکت کرتی ہوئی اور دوسرای دفعہ اپنا کل فاصلہ
طے کر کے مخالف سمت مین لوٹتی ہوئے
چونکہ ل = گ ـ ع س اسلیئے $\frac{گ}{ع}$ وقت کے بعد ل = ۰ یعنی $\frac{گ}{ع}$ وقت تک چلکر
ذرہ ایک لحظہ تک ساکن رہکر سمت مخالف مین لوٹنا شروع کریگا اور $\frac{گ}{ع}$ وقت
مین فاصلہ طے شدہ
$= گ س ـ \frac{ع س^۲}{۲} = \frac{گ^۲}{ع} ـ \frac{ع گ^۲}{۲ع^۲} = \frac{گ^۲}{۲ع}$ ـ یعنی ذرہ $\frac{گ^۲}{۲ع}$
اکائین فاصلہ کی طے کر کے سمت مخالف مین لوٹنا شروع کریگا
(۴) جب ذرہ فاصلہ $\frac{گ^۲}{۲ع}$ طے کر کے لوٹنا شروع کرتا ہے تو ہم کہہ سکتی ہین
کہ ذرہ حالت سکون سے اسراع + ع کے ساتھ نقطہ ا کے سمت مین
حرکت کرتا ہے
∴ اگر نقطہ ا تک پہونچنے مین وقت سَ صرف ہو تو $\frac{گ^۲}{۲ع} = \frac{۱}{۲} ع سَ^۲$
$∴ سَ = \frac{گ}{ع}$
اس سے ظاہر ہے کہ جتنا وقت ذرہ کو نقطہ ا سے اپنا کل فاصلہ اصل سمت
مین طے کرنے مین صرف ہوتا ہے اوتنا ہے وقت واپس نقطہ ا تک
پہونچنے مین صرف ہوتا ہے اور نقطہ ا سے چلکر پہر نقطہ ا پر واپس آنے
مین ۲ $\frac{گ}{ع}$ وقت صرف ہوتا ہے

فاصلہ طے شدہ جداگانہ عدد ۱ و ۳ و ۵ وغیرہ طاق اعداد کی متناسب ہے

(۳۵) — کوئی ذرہ کسی نقطہ (ا) سے گ سرعت سے خط اب کے سمت مین چلتا ہے اوسکا اسراع − ع ہے تو ذرہ کا وقت حرکت جب وہ مقام ب پر پہنچتا ہے معلوم کرو اور اوسکی آئیندہ حرکت کا حال دریافت کرو

فرض کرو کہ فاصلہ اب = ف اکایون فاصلہ کے اور وقت حرکت = س اکایون وقت کے ہے تو بموجب دفعہ ۲۸

$$\text{ف} = \text{گ}\,\text{س} - \frac{\text{ع}\,\text{س}^{2}}{2}$$

$$\therefore \text{ع}\,\text{س}^{2} - 2\,\text{گ}\,\text{س} + 2\,\text{ف} = 0$$

$$\therefore \text{س} = \frac{\text{گ} \pm \sqrt{\text{گ}^{2} - 2\,\text{ع}\,\text{ف}}}{\text{ع}}$$

اس مساوات سے ہم مندرجہ ذیل نتایج نکالتے ہین

(۱) اگر $\text{گ}^{2} < 2\,\text{ع}\,\text{ف}$ تو س کی قیمت ناممکن ہے - یعنی اس حالت مین ذرہ مقام ب تک نہین پہونچ سکتا

(۲) اگر $\text{گ}^{2} = 2\,\text{ع}\,\text{ف}$ تو $\text{س} = \frac{\text{گ}}{\text{ع}}$

مگر موجب حد (۲۰) $\text{ل} = \text{گ} - \text{ع}\,\text{س} = \text{ع}\left(\frac{\text{گ}}{\text{ع}} - \text{س}\right)$

گویا $\frac{\text{گ}}{\text{ع}}$ وقت کے بعد $\text{ل} = 0$

وقت $\frac{\text{گ}}{\text{ع}}$ کے بعد ل کی قیمت نفی ہو گی یعنی ذرہ کی سرعت محصلہ اصل سمت حرکت کی مخالف سمت مین ہو گی - اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ذرہ صرف مقام ب تک پہونچتا ہے اور آگے نہین چلتا اور ایک لحظہ تک نقطہ ب پر ٹھیر کر سمت مخالف مین لوٹنا شروع کرتا ہے

شدہ وقت کی مجذور کے متناسب ہو تو معلوم ہو گا کہ ذرہ کا اسراع یکسان ہے

(۲) — ذرہ حالت سکون سے متحرک ہو کر جو کچھ فاصلہ طے کرتا ہے وہ فاصلہ اوسکے انجام مین سرعت محصلہ کی مجذور کی متناسب ہوتا ہے

(۴۳) تعریف - اگر حالت سکون سے یکسان اسراع سے ذرہ ف فاصلہ طے کرنے مین (ل) سرعت حاصل کرے تو ل کو ذرہ کی سرعت محصلہ ف فاصلہ مین کہینگے

(۴۴) دفعہ ۲۸ مین ثابت ہوا ہے کہ ذرہ ابتدائی سرعت گ اور اسراع ع سے چلکر س وقت مین گ س + $\frac{۱}{۲}$ ع س^{۲} فاصلہ طے کرتا ہے پس (س−۱) وقت مین ذرہ گ (س−۱) + $\frac{۱}{۲}$ ع (س−۱)^{۲} فاصلہ طے کرتا ہے - تو س وین اکائی وقت مین فاصلہ طے شدہ

= گ س + $\frac{۱}{۲}$ ع س^{۲} − {گ (س−۱) + $\frac{۱}{۲}$ ع (س−۱)^{۲}}

= گ + $\frac{۱}{۲}$ ع (۲س − ۱)

یعنی اول اکائی وقت مین فاصلہ طے شدہ = گ + $\frac{۱}{۲}$ ع -

دوسری اکائی وقت مین فاصلہ طے شدہ = گ + $\frac{۳}{۲}$ ع وغیرہ

اگر ذرہ حالت سکون سے متحرک ہو تو گ برابر صفر کی ہوتا اسصورت مین

اول اکائی وقت مین فاصلہ طے شدہ = $\frac{ع}{۲}$

دویم مین .... = $\frac{۳ع}{۲}$

سیوم مین .... = $\frac{۵ع}{۲}$ وغیرہ

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ اول دویم سیوم وغیرہ اکایون وقت مین

∴ ف = (گ + ع س/٢) س = گ س + ع س٢/٢

(٣٠) ثابت ہو چکا کہ ذرہ کی سرعت محصلہ ل = گ + ع س . . . . (١)

اور فاصلہ طے شدہ ف = گ س + ع س٢/٢ . . . . (٢)

∴ ل٢ = گ٢ + ٢ گ ع س + ع٢ س٢ = گ٢ + ٢ ع (گ س + ع س٢/٢)

= گ٢ + ٢ ع ف . . . . . . (٣)

ان تین مساواتون سے ذرہ کی حرکت ہر ایک حالت مین معلوم ہو سکتی ہے

(٣١) جب ذرہ کی سرعت گھٹتی جاتی ہے یعنی جب اسراع سرعت کے مخالف سمت مین موجود ہوتا ہے تب اسراع ع کو علامت نفی سے تعبیر کرنا چاہئے اس صورت مین مساواتین مذکورہ بالا اسطرح پر لکھی جائینگی

ل = گ − ع س . . . . (١)

ف = گ س − ع س٢/٢ . . . . (٢)

ل٢ = گ٢ − ٢ ع ف . . . . (٣)

(٣٢) اگر س وقت کے ابتدا مین ذرہ ساکن ہوتا تو گ = ٠ ∴ ل = ع س . . . (١)

ف = ع س٢/٢ . . . (٢) ل٢ = ٢ ع ف . . . . . . (٣)

واضح ہو کہ چونکہ اسراع یکسان ہو تو اسلئے مساوات نمبر (٢) و (٣) سے بیان ذیل معلوم ہوتا ہے

(١) کہ جب ذرہ حالت سکون سے متحرک ہوتا ہے تو کسی مفروضہ وقت مین فاصلہ طے شدہ وقت کی مجذور کی متناسب ہوتا ہے اور اسکے برعکس جب کسی وقت مفروضہ مین فاصلہ طے

$= گ س + \frac{ع س^2}{2} (1 + \frac{1}{ن})$

مگر حقیقت مین کسی کل حصہ وقت مین ذرہ کی سرعت یکسان نہین ہے بلکہ ذرہ کی اصل سرعت اُس حصہ کی ابتدائی و انجام کے سرعتون کی درمیان واقع ہے اور خواہ اوس حصہ وقت کو کتنا ہی قلیل فرض کیا جائے تب بھی یہی کہہ سکینگے - کیونکہ ذرہ کی سرعت ہر لحظہ مین زیادہ ہوتی جاتی ہے پس اصل مین جتنا فاصلہ ذرہ س وقت مین طے کرتا ہے وہ $ف_1$ و $ف_2$ سے درمیان واقع ہے اور خواہ ہر ایک حصہ وقت کتنا ہی قلیل فرض کیا جاوے تب بھی یہی کہہ سکینگے

اگر $\frac{س}{ن}$ کو بہت ہی قلیل فرض کرنے سے یعنی ن کو بہت کثیر فرض کرنے سے $ف_1$ و $ف_2$ دونو $گ س + \frac{ع س^2}{2}$ کے برابر ہوجائیگی کیونکہ $\frac{1}{ن}$ بہت ہی قلیل ہوکر برابر صفر کے ہوجاتا ہے - پس اگر اصل فاصلہ طے شدہ ف سے تعبیر ہو تو $ف = گ س + \frac{ع س^2}{2}$

(۲۹) مساوات مذکورہ بالا اور طرح بھی ثابت ہوسکتی ہے - چونکہ ذرہ کی سرعت یکسان طور پر بڑہتی ہے - پس نصف وقت کے اخیر مین ذرہ کی سرعت ابتدا اور انجام کی سرعتونکا اوسط ہے یعنے اگر نصف وقت سے پیشتر اور بعد برابر وقتون پہ دو لحظون کی سرعت کا لحاظ کیا جاے تو معلوم ہوگا کہ پہلی لحظہ کی سرعت نصف وقت کی سرعت سے اُتنی کم ہے جتنی کہ بعد کے لحظہ کی سرعت نصف وقت کی سرعت سی زیادہ ہی - پس ذرہ س وقت مین اوتنا ہی فاصلہ طے کریگا جو کہ وہ اوسط سرعت کے ساتھہ برابر یکسان چلکر اوسی عرصہ مین طے کرتا مگر

اوسط سرعت $= \frac{1}{2} (گ + گ + ع س) = گ + ع \frac{س}{2}$

باب سوم

سرعت اور اسراع کی ساتھ ذرہ کی حرکت کی بیان مین

(۲۷) اسباب مین ہم سرعت اور اسراع سی ہمیشہ یکسان سرعت اور یکسان اسراع مراد لینگے

(۲۸) کسی مفروضہ لحظہ مین ذرہ کی سرعت گ ہے اور وہ سرعت ع اکایون اسراع سے بڑہتی ہے - اگر س وقت تک ذرہ اسیطرح حرکت کرتا رہے تو کتنا فاصلہ طی کریگا

فرض کرو کہ وقت س کو ن برابر حصون مین منقسم کیا گیا ہی - پس ہر ایک حصہ $= \frac{س}{ن}$ چونکہ ہر ایک اکائی وقت مین ذرہ کی سرعت بحساب ع اکایون اسراع کی زیادہ ہوتی ہے پس شروع سے جداگانہ $\frac{س}{ن}$ و $\frac{۲س}{ن}$ و $\frac{۳س}{ن}$ وغیرہ وقتون کے انجام مین ذرہ کی سرعت جداگانہ $گ + \frac{ع س}{ن}$ و $گ + \frac{۲س ع}{ن}$ و $گ + \frac{۳س ع}{ن}$ --- و $گ \frac{ن س ع}{ن}$ ہوگی (بموجب حد ۲۰)

فرض کرو اگر ذرہ ہر ایک حصہ وقت مین اوس حصہ کے انجام تک اوس حصہ کی ابتدائی سرعت سے یکسان طور پر چلتا تو $ف_۱$ فاصلہ طے کرتا اور اگر وہ ذرہ ہر ایک حصہ وقت مین اوس حصہ کی انجام تک اوسی حصہ کی انجام کی سرعت سے یکسان طور پر چلتا تو $ف_۲$ فاصلہ طے کرتا

$$\therefore ف_۱ = گ \times \frac{س}{ن} + (گ + \frac{س ع}{ن})\frac{س}{ن} + (گ + \frac{۲س ع}{ن})\frac{س}{ن} + \cdots (گ + ع(ن-۱)\frac{س}{ن})\frac{س}{ن}$$

$$\therefore ف_۱ = گ س + ع \times \frac{س^۲}{ن^۲}\{۱+۲+۳+ --- +(ن-۱)\} = گ س + \frac{ع س^۲}{۲ن^۲} ن(ن-۱) = گ س + \frac{ع س^۲}{۲}(۱ - \frac{۱}{ن})$$

اسیطرح سی $ف_۲ = (گ + \frac{ع س}{ن})\frac{س}{ن} + (گ + \frac{ع \times ۲س}{ن})\frac{س}{ن} + \cdots + (گ + ع\frac{ن س}{ن})\frac{س}{ن}$

$$= گ س + \frac{ع س^۲}{ن^۲}(۱+۲+۳+ \cdots +ن)$$

اگر ½ سیکنڈ اکائی وقت فرض کیجاوے تو وہی اسراع کس عدد سے تعبیر ہوگی

(۲) اگر ۱۰ سیکنڈ اکائی وقت اور ایک گز اکائی فاصلہ ہو تو اسراع ۳۲ فٹ فی سیکنڈ کس عدد سے تعبیر ہوگی   جواب   ۱۰۶۶٫۶

(۳) اگر م سیکنڈ اور ف فٹ جداگانہ اکائی وقت اور اکائی فاصلہ فرض کرنے سے کوئی اسراع عدد ع سے تعبیر ہو تو ایک سیکنڈ اور ایک فٹ اکائیں فرض کرنے سے وہی اسراع کس عدد سے تعبیر ہوگا۔

(۴) اگر ایک فٹ اکائی فاصلہ ہو اور اسراع ۳۲ فٹ فی سیکنڈ اکائی اسراع ہو تو اکائی وقت دریافت کرو   جواب   ٫۱۷ سیکنڈ

(۵) ایک میل کو اکائی فاصلہ فرض کرنے سے اگر سرعت ۳۰ میل فی گھنٹہ کی عدد ۱ سے تعبیر ہو تو اسراع ۳۲ فٹ فی سیکنڈ کس عدد سے تعبیر ہوگا۔

جواب   ۸۷۱۴۲۷

(۶) ایک میٹر ۳۷٫۱۹۰ انچ ہوتا ہے تو بتاؤ کہ سیکنڈ اور میٹر کی حساب سے کشش ثقل کس عدد سے تعبیر ہوگی   جواب   ۹٫۸

(۷) اگر ۵ سیکنڈ اکائی وقت ہو اور اسراع کشش ثقل عدد ۱۴ سے تعبیر ہو تو اکائی فاصلہ کیا ہوگی   جواب   ۵۵٫۵

یکسان رہتا ہے اور اُس کا مقدار وہی ہوتا ہے جو لحظہ مفروضہ کے شروع مین تھا تو جو عدد اُس لحظہ کے وقت مین سرعت کی کمی یا زیادتی کو تعبیر کرتا ہے وہی عدد اُس لحظ کے اسراع کو بھی تعبیر کریگا

واضح ہو کہ بہت تھوڑے سے وقت تک اسراع غیر یکسان کو یکسان فرض کرنے سے کچھ غلطی واقع نہ ہوگی مقدار مستبدل کے ناپنے کا قاعدہ ہر جگہ اسیطرح کا ہے (دیکھو حد ۱۳)

(۲۶) واضح ہو کہ اسراع ذرہ پر طاقت عاملہ کا اثر ہے۔ اگر یہ طاقت مستقل ہو تو اسراع پیدا شدہ بھی یکسان ہوگا یعنی اُس طاقت کے اثر سے ذرہ کی سرعت ہر لحظہ مین یکسان طور پر زیادہ ہوتی جائیگی اگر وہ طاقت متحرک ذرہ کی حرکت کے مخالف سمت مین عمل کرے تو اسکے اثر سے موجودہ سرعت درجہ بدرجہ گھٹتی جاویگی۔ اسلئے سمت حرکت کی مخالف سمت کا اسراع اصل مین ذرہ کی سرعت کو گھٹاتا ہے پس ہم اسطرح کی اسراع کو منفی سمجھتے ہین جب طاقت عاملہ کا مقدار مستبدل ہوتا ہے تو اسکے اثر سے متبدل اسراع پیدا ہوگا۔ لیکن جب ہم ذرہ کے اسراع کا ذکر کرینگے تو طاقت عاملہ پر خیال کرنیکی کچھ ضرورت نہین۔ وہان صرف ذرہ کی حرکت اور قسم حرکت کا خیال کرنا کافی ہے۔ کونسی طاقت کس قسم اور کس اندازہ کی حرکت پیدا کرتی ہے ان باتونکا بیان شئے متحرک کی جسم سے تعلق رکھتا ہے اور اسکا بیان آئندہ ہوگا

سوالات باب دوم اسراع

(۱) کسی شئے کا اسراع بسبب کشش ثقل کے فی سکنڈ ۲ء۳۲ فٹ کے حساب سے ہی

ہوتا ہے۔ جبکہ سَ سیکنڈ اور فَ فٹ جداگانہ اکائی وقت اور اکائی

فاصلہ ہون تو عَ اور عَ کے درمیان نسبت دریافت کرو ؀

اول کی اکائین فرض کرنے سے اسرع ع سے یہ مراد ہی کہ ہر ایک س سیکنڈ

مین ذرہ کی سرعت بحساب ع × ف فٹ فی س سیکنڈ کے زیادہ ہوتی ہی

اب فی س سکنڈ مین سرعت کی زیادتی بحساب ع × ف فٹ فی س

سکنڈ کے = فی س سکنڈ مین سرعت کی زیادتی بحساب $\frac{ع \times ف}{س}$ فٹ

فی سکنڈ کے = ہر ایک سکنڈ مین سرعت کی زیادتی بحساب $\frac{ع \times ف}{س^2}$ فٹ فی

سکنڈ کے اسی طرح دوسری اکائین فرض کرنے سے اسرع عَ سے یہ مراد ہو

ہے کہ ہر ایک سکنڈ مین ذرہ کی سرعت کی زیادتی بحساب $\frac{عَ \times فَ}{سَ^2}$ فٹ

فی سکنڈ کے ہر لیکن اسرع ایکساہی ہی

$$\therefore \frac{ع \times ف}{س^2} = \frac{عَ \times فَ}{سَ^2}$$

$$\therefore \frac{ع}{عَ} = \frac{\left(\frac{س}{سَ}\right)^2}{\frac{ف}{فَ}} = \frac{\text{ہر دو اکائیون وقت کے نسبت کا مجذور}}{\text{ہر دو اکائیون فاصلہ کی نسبت}}$$

(۲۵) اسرع تبدل کے بیان مین - جب ذرہ کے سرعت برابر وقت مین برابر

طور پر کم یا زیادہ نہ ہو یعنی اگر مختلف لحظون مین اُسکی زیادتی یا کمی مختلف

ہو تو اُس اسرع کو غیر یکسان کہتے ہین ؀ ایسی حالت مین کسی مفروضہ

لحظہ مین سرعت کی زیادتی یا کمی کے معلوم کرنیکا طریقہ یہ ہے کہ ہم فرض کرتے

ہین کہ لحظہ مفروضہ کے شروع سے ایک اکائی وقت تک اسرع

تبدیلی مراد ہی۔

(۲۳) چونکہ اسراع اکائی سرعت سے ناپا جاتا ہے اِسلئے اکائی
سرعت کے مختلف لینے سے ایک ہی اسراع مختلف عددون سے
تعبیر ہوگا۔ لیکن اکائی وقت اور اکائی فاصلہ مختلف فرض کرنے
سے اکائی سرعت مختلف ہوتی ہی (دیکھو حد ۱۲) لہذا اکائی وقت اور اکائی
فاصلہ مختلف فرض کرنے سے خاص اسراع کے تعبیر کرنیوالا عدد بھی مختلف ہوگا۔
مثلاً جہان اکائی وقت ایک سیکنڈ اور اکائی فاصلہ ایک فٹ ہو وہان اکائی
سرعت وہ سرعت ہی جس سے ذرہ ایک سیکنڈ مین یکسان حرکت سے
ایک فٹ فاصلہ طی کرتا ہے۔ فرض کرو کہ کوئی مفروضہ اسراع عدد ۵ سے
تعبیر ہوتا ہی یعنی ہر ایک سیکنڈ مین ذرہ کی سرعت بحساب ۵ فٹ فی سیکنڈ زیادہ ہوتی ہی۔ اب اگر ہم ایک منٹ
اور ایک گز کو جداگانہ اکائی وقت اور اکائی فاصلہ فرض کرین تو اکائی سرعت وہ سرعت ہوگی جس سے
ذرہ ایک منٹ یعنی ۶۰ سکنڈ مین ایک گز یعنے ۳ فٹ فاصلہ طی کرتا ہی اور وہ اسراع
اکائی اسراع ہوگا جس سے ذرہ کی سرعت ہر ایک منٹ مین بحساب ایک گز
فی منٹ زیادہ ہوتی ہے۔ اب ۵ فٹ فی سیکنڈ برابر ہے $\frac{5 \times 60}{3}$
گز فی منٹ اور ہر ایک سیکنڈ مین سرعت کی اِس حساب سے تبدیلی برابر ہی
ہر ایک منٹ مین اُسکے $\frac{5 \times 60 \times 60}{3}$ گز فی منٹ کی حساب سے تبدیلی اِسلئے وہی
مفروضہ اسراع منٹ اور گز کے حساب سے عدد ۶۰۰۰ سے تعبیر ہوگا۔

(۲۴) جبکہ س سیکنڈ اور ف فٹ جداگانہ اکائی وقت اور اکائی فاصلہ ہون
کوئی اسراع مفروضہ عدد ع سے تعبیر ہوتا ہی اور وہی اسراع ع' سے تعبیر

تو اُسکی سرعت ہین ع × س اکائین سرعت کی زیادہ ہونگی - اور اگر اُس وقت
کے شروع ہین ذرہ کی سرعت گ ہو تو س وقت کی انجام ہین گ + ع س ہوگی
پس اگر س وقت کے انجام ہین ذرہ کی سرعت ل سے تعبیر ہو تو

ل = گ + ع س

واضح ہو کہ اگر س وقت کے شروع ہین ذرہ ساکن ہو تو مساوات مذکورہ
بالا ہین گ = ۰ پس اس صورت ہین ل = ع س - اگر ذرہ کا اسراع سرعت
گ کی سمت مخالف ہین ہو تو اُس اسراع کو -ع سے تعبیر کرتے ہین - اور اُس
صورت ہین ل = گ - ع س

(۲۱) س وقت کے انجام ہین ذرہ کے کل سرعت کو اُسکی سرعت محصلہ کہتے
ہین اور اُس وقت کی شروع کے سرعت کو اُسکے ابتدائی سرعت کہتے ہین ◆
سرعت محصلہ ہر ایک لحظہ ہین بدلتی جاتی ہی یعنے اُسکو غیر یکسان سرعت سمجھنا
چاہیے اور حد ۱۳ - ہین جو غیر یکسان سرعت کے معنی اور اُسکے ماپنے کا
طریقہ بیان کئی گئی ہین اُسجگہ بھی عمل ہین آئینگے ◆

(۲۲) سرعت کی طرح اسراع کو بھی خط مستقیم سے تعبیر کرتی ہین - مثلاً فرض
کرو کہ ذرہ کا اسراع مستوی ع ہے یعنی ایک اکائی وقت ہین اُسکی
سرعت بحساب ع اکایون سرعت کے زیادہ ہوتی ہی - اِسجگہہ جو خط مستقیم
ع اکایون سرعت کو تعبیر کرتا ہے وہی خط اسراع ع کو بھی تعبیر کریگا
پس سرعت اور اسراع ہین صرف اتنا فرق ہے کہ سرعت سی ذرہ کے درجہ
بدرجہ مقام کی تبدیلی مراد ہی اور اسراع سے اُسکے درجہ بدرجہ سرعت کی

وہ سرعت بمقدار کتنی اکائین سرعت کے متغیر ہے تو جو عدد سرعت کی ان اکائیوں
تعبیر کریگا وہی ذرہ کے اسراع کو تعبیر کریگا۔ مثلاً فرض کرو کہ ایک ذرہ کس لحظہ مین
۳۲ فٹ فی سیکنڈ سرعت کی ساتھہ چلرہا ہی اور اوسکی حرکت درجہ بدرجہ یکسان طور پر
بڑہتی جاتی ہے۔ اور ایک سیکنڈ کے بعد اوسکی سرعت ۴۰ فٹ فی سیکنڈ
ہے۔ اور اسکی ایک سیکنڈ کے بعد ۴۸ فٹ فی سیکنڈ ہے۔ تو ہم
کہہ سکتی ہین کہ ذرہ کا اسراع ۸ ہے یعنی ہر ایک سیکنڈ مین ذرہ کی سرعت ۸ فٹ
فی سیکنڈ بڑہتی ہے۔ اور اسیطرح اگر ایک سیکنڈ کے بعد سرعت کم ہو کر
۲۰ فٹ فی سیکنڈ ہوتی۔ تو ہم کہتی ہین کہ یہان اسراع -۱۲ ہے یعنی یہان ذرہ کی
سرعت ہر ایک سیکنڈ مین بحساب ۱۲ اکایون سرعت کے کم ہوتی ہے۔ واضح
ہو کہ اسراع کے مقدار ماپنے کے لئے ہمنے اوس اسراع کو اکائی فرض کیا ہے
جس سے ذرہ کی سرعت ایک اکائی وقت مین بحساب ایک اکائی سرعت
کی بڑہتی ہے۔ یعنی جب ہم کہتی ہین کہ اسراع ۸ ہے تو ہمارے یہہ مراد ہی
کہ وہ اسراع اکائی اسراع کا ۸ گنا ہے۔ یعنی اگر ذرہ کی سرعت ہر ایک سیکنڈ مین
بحساب اکائی سرعت کے بڑہی ہو۔ تو اوسکو (۱) اکائی اسراع فرض کیا ہے
اگر سرعت ہر ایک سیکنڈ مین بحساب (۲) اکائی سرعت کے بڑہی تو اوسکو (۲) اکائی
اسراع فرض کیا ہے۔ اور علی ہذا القیاس

(۲۰) اسطرح جب ہم کہتی ہین کہ اسراع ع ہی تو سمجہنا چاہیے کہ ایک اکائی
وقت مین ذرہ کی حرکت یکسان طور سے بحساب ع اکایون سرعت کی بڑہتی ہے
اسلئے اگر ذرہ اس تبدیل سرعت کے ساتھہ اس اکائی وقت تک چلتا رہے

جواب س = $\sqrt{\text{گ}^2 + \text{گ}'^2 - 2\,\text{گ}\,\text{گ}' \text{ جم } \theta}$

(١٦) دو نقطے یکسان سرعت سے چلتی ہین - انمین سے ایک دایرہ کی محیط اور دوسرا اوسکی قطر کو ایک ہی وقت مین طی کرتا ہے - اونکی سرعتون کی نسبت دریافت کرو جواب ۲۲:۷

باب دویم اسراع* کی بیان مین

(١٧) - سرعت غیر یکسان دو قسم کی ہوتی ہے - **اول** وہ جبکہ سرعت کی کمی یا بیشی یکسان ہو یعنی اوسکے کمی بیشی کا مقدار برابر وقت مین یکسان ہو خواہ وہ وقت کتنا ہی قلیل فرض کیا جاوے **دوم** وہ جبکہ سرعت کی کمی بیشی کا مقدار برابر وقت مین یکسان نہو

(١٨) اول قسم کی سرعت غیر یکسان مین زیادتی یا کمی درجہ بدرجہ ہوتی ہے اور اوسکی زیادتی یا کمی ذرہ کے وقت حرکت کے متناسب ہوتی ہے - کسی مفروضہ اکائی وقت مین سرعت کی ایسی زیادتی کو اسراع کہتی ہین - لیکن سرعت کے کمی کو نفی زیادتی فرض کرنے سے کچھہ ہرج نہین ہوتا - اسلئے جس عدد سے اسراع تعبیر کیا جاویگا - اوسکے ساتھہ علامت نفی یا اثبات سے معلوم کرنا چاہیے کہ آیا وہ سرعت کی کمی یا زیادتی کو تعبیر کرتا ہے

(١٩) اسراع یکسان کا بیان - جب ذرہ کی سرعت ہر ایک لحظہ مین یکسان طور سے متغیر ہو تو مشاہدہ سے معلوم ہو سکتا ہے کہ کسی مفروضہ اکائی وقت مین

* چونکہ سرعت متزایدہ اور سرعت متناقصہ کے لئے کوی عمدہ لفظ مفرد نہین ملا اسلئے اونکی قایم مقام لفظ اسراع کا استعمال کیا گیا ہے *

(۹) کوی پہیہ جسکا قطر ایک گز ہے دو گھنٹہ مین ۵ گز فاصلہ طے کرتا ہے تو پہیہ کی مرکز اور محیط کی کسی نقطہ کی سرعتون کے نسبت دریافت کرو

(۱۰) میانمیر سے امرتسر ۲۵ میل کے فاصلہ پر ہے میانمیر مین ۱۲ بجی دن کے ایک توپ چلی اگر آواز فی سیکنڈ ۱۰۹۰ فٹ فاصلہ یکسان حرکت سے طی کرے تو امرتسر مین آواز کتنی دیر مین سنائی دیگی جواب ۲ منٹ ۱ سکینڈ

(۱۱) کسی بادل سے بجلی چمکی اور ۱۰ سکینڈ کے بعد گرج سنی گئی۔ بجلی کا چمکنا اور آواز کا پیدا ہونا ایک ہی لحظہ مین واقع ہوا۔ لیکن بجلی کے چمک کے پہونچنی مین کچھہ دیر نہین لگی تھی۔ اور آواز کی یکسان سرعت فی سیکنڈ ۱۰۹۰ فٹ ہے تو معلوم کرو کہ بادل کتنی دور ہے جواب ۲۰۶۴ میل

(۱۲) ایک یکسان سرعت ۳ میل فی گھنٹہ ہے اگر گز و منٹ اکائین فرض کیجائین تو وہ سرعت کس عدد سے تعبیر ہوگی جواب ۸۸

(۱۳) کوی مسافر یکسان رفتار سے چلکر ۲ گھنٹہ مین ۷ میل فاصلہ طی کرتا ہے اور اسکی سرعت عدد ۲ سے تعبیر کیجاتی ہے اگر ۱ فٹ اکائی فاصلہ ہو تو اکائی وقت کیا ہوگی جواب $\frac{30}{77}$ سکینڈ

(۱۴) ایک گھڑی چھوٹی سوئی کا طول ۲ انچ ہے اور بڑے سوئی کا $\frac{1}{2}$ ۳ انچ۔ انکی نوکون کی سرعتون کی نسبت دریافت کرو جواب ۱ : ۲۱

(۱۵) دو ذرہ کسی ایک نقطہ سے دو خطوط مستقیم کے سمتون مین گ اور گ یکسان سرعتون کے ساتھہ چلی اونکی سمتون کا زاویہ میلان ۵ ہے تو س وقت مین اندرونکا فاصلہ ایک دوسرے سے معلوم کرو

نسبت دریافت کرو جواب ۱۶۲

(۲) ایک ریل گاڑی دو گھنٹہ مین ۱۰۰ میل چلتی ہے تو سیکنڈ اور فٹ کی اکایون مین اوسکی اوسط سرعت دریافت کرو جواب ۷۳ ۱/۳

(۳) ایک ریل گاڑی ۵ گھنٹہ مین ۱۵۰ میل چلتی ہے تو فٹ اور سیکنڈ کی حساب سے اوسکا سرعت دریافت کرو جواب ۴۴

(۴) ایک ریل گاڑی لاہور سے کلکتہ تک ۱۲۰۰ میل فاصلہ ۷۰ گھنٹہ مین طی کرتی ہے تو اوسکی سرعت ایک گھنٹہ مین دریافت کرو۔ اور اوسی حساب سے لاہور سے دہلی تک جو ۳۵۰ میل کی فاصلہ پر ہے کتنی وقت مین پہونچیگی

(۵) زمین اپنے محور پر ۲۳ گھنٹہ ۵۶ منٹ مین ایک دفعہ گہوم جاتی ہے اوسکا قطر ۷۹۲۵ میل ہے تو خط استوا پر کسی ذرہ کی سرعت بحساب فٹ اور سیکنڈ کی کیا ہوگی جواب ۱۵۲۵٫۷

(۶) زمین ۳۶۵ دن ۶ گھنٹہ مین سورج کی گرد ایک دفعہ گردش کرتی ہے اگر اوسکی حرکت ایک دایرہ مین ہو جسکا نصف القطر ۹۵۰۰۰۰۰۰ میل ہے تو ایک منٹ مین کتنا فاصلہ طے کریگی

(۷) آفتاب سے زمین پر شعاع کے پہونچنی مین ۸ منٹ ۱۲ سیکنڈ صرف ہوتی ہین تو ایک سکینڈ مین شعاع کی سرعت معلوم کرو ۱۸۴۰۰۰ میل

(۸) چاند کا فاصلہ کرہ زمین سے ۲۴۰۰۰۰ میل ہے تو معلوم کرو کہ ایک توپ کا گولہ ہر ایک سیکنڈ مین ۵۰۰ گز یکسان حرکت سے چلکر چاند تک کتنی وقت مین پہونچیگا

(۱۵) جب غیر یکسان سرعت کا بیان ہو تو کسی مقام مفروضہ پر کسی لحظہ مفروضیہ مین بہت تہورے سے وقت تک اوس سرعت کو یکسان سمجہہ کر یکسان سرعت کا قاعدہ اوس خاص مقام پر عمل مین لانا چاہیے - لیکن یہہ یاد رکہنا چاہئے کہ یہہ اندازہ سرعت کا فقط اوسی تہورے سے وقت کے لئے ہی - دوسری لحظہ مین سرعت مختلف ہوگے

(۱۶) اس باب کی شروع مین متعلم کو یاد رکہنا چاہئے کہ سرعت کوی طاقت نہین ہے بلکہ طاقت کا نتیجہ یا اثر ہے یعنی طاقت ذرہ یا جسم پر عمل کرکے حرکت پیدا کرتی ہی اسلئے یہہ کہنا درست نہین کہ سرعت ذرہ یا جسم پر عمل کرتی ہے - اور یہہ بہی یاد رکہنا چاہئے کہ حرکت کے لئے طاقت کا ذرہ یا جسم پر برابر عمل کرنا ضرور نہین - طاقت تہوڑے دیر عمل کرکے جو حرکت پیدا کریگی اوسی حرکت سے جسم چلتا رہیگا - مثلاً اگر کسی لکڑی سے کسی جسم کو ٹہوکر لگائی جائے تو جب تک لکڑی جسم سے مس کرتی رہیگی تب تک طاقت عمل کریگی لیکن اوسکی بعد بہی جسم متحرک رہیگا - اگر طاقت پی در پی عمل کرے تو ہر ایک لحظہ حرکت بڑہتی جائیگی - اسکا پورا بیان حرکت کی دوسری قانون کے ذکر مین کیا جائیگا

مسئلہ باب اوّل

(۱) - دو نقطہ یکسان سرعت کے ساتہہ چلتی ہین - ایک $\frac{1}{2}$ سیکنڈ مین ۵ فٹ فی سیکنڈ اور دوسرا ۱۰۰ اگز فی منٹ تو ان دونو نقطون کے سرعتون کے

اس حساب سے جتنا فاصلہ ذرہ ایک ُ اکائی وقت مین طے کرتا ہے۔ وہی اوس لحظہ مین اوسکی سرعت کو تعبیر کریگا۔ اسکا یہہ نتیجہ ہے کہ جب کوئی سرعت ہر ایک لحظہ مین بدلتی جاے تو اوسکا مقدار دریافت کرنیکے لئے بہت تہوڑے سے وقت کے لئے اوسے غیر متبدل فرض کرنا چاہئیے جیسے کہ محیط دایرہ کے پیمایش کے لئے ہم اوسکی بہت چہوٹی حصہ کو خط مستقیم فرض کرتی ہین

(۱۴) دنیا مین غیر یکسان حرکت کے مثالین یکسان حرکت کے نسبت زیادہ ہین۔ اور کسی وقت یا فاصلہ مین اوسکے اندازہ کرنیکا طریقہ بہی آسان ہے۔ مثلاً ہم جانتی ہین کہ ریل گاڑے یکسان سرعت سے نہین چلتی۔ شروع مین اوسکی سرعت بہت کم ہوتی ہے۔ درمیان مین بہت سے بڑی ہوتی ہے۔ اور بعد ازان رفتہ رفتہ گہٹتی جاتی ہے۔ مثلاً جب ہم کہتی ہین کہ فاصلہ طے شدہ درمیان کسی مقام پر اوسکی سرعت ۵۰ میل فی گہنٹہ تہی۔ تو اوسسے یہہ مراد ہے کہ اگر گاڑی ایک گہنٹہ تک اوسی سرعت سے جو اوسجگہہ تہی چلتی تو ایک گہنٹہ مین ۵۰ میل طی کرلیتی۔ اسطرح جب کوئی شئے اوپر سے نیچے کے طرف گرتی ہے تو ہم جانتی ہین کہ بباعث کشش ثقل اوسکی سرعت ہر ایک لحظہ مین بڑہتی جاتی ہے۔ لیکن جب ہم کہتی ہین کہ کسی مفروضہ سکینڈ مین اوس شئے کی سرعت ۳۲ فٹ فی سکینڈ ہے تو اوس سے یہہ مراد ہوتی ہی کہ اگر وہ شئے ایک سکینڈ تک اوسی سرعت سے یکسان چلی تو ۳۲ فٹ فاصلہ طے کریگی

اکائی وقت اور اکائی فاصلہ فرض کرنی سے وہی سرعت عدد ۲۰ ا سے تعبیر ہوگی اور علی ہذا القیاس ۔ فرض کرو کہ جب گ سکینڈ اکائی وقت اور ن فٹ اکائی فاصلہ ہے کوی مفروضہ یکسان سرعت گ سے تعبیر ہے ۔ اور جب گُ سکینڈ اکائی وقت اور نُ فٹ اکائی فاصلہ ہو تو وہی سرعت گُ سے تعبیر ہے ۔ تو گ کی نسبت گُ سے دریافت کرو پہلی اکائین فرض کرنے سے اکائی سرعت وہ حرکت ہے جس سے کہ ذرہ گ سیکنڈ مین ن فٹ فاصلہ طے کرتا ہے۔ اسلئے گ سرعت سے یہہ مراد ہے کہ ذرہ گ سیکنڈ مین ن × گ فٹ فاصلہ طی کرتا ہے ۔ یعنی ایک سیکنڈ مین $\frac{ن \times گ}{ک}$ فاصلہ طے کرتا ہے ۔ اسیطرحسے دوسری اکائین فرض کرنے سے ذرہ ایک سیکنڈ مین $\frac{نُ \times گُ}{کُ}$ فٹ فاصلہ طی کریگا مگر چونکہ حرکت ایک ہے پس $\frac{ن \times گ}{ک} = \frac{نُ \times گُ}{کُ}$ یعنی

$$\frac{گ}{گُ} = \frac{\frac{ک}{کُ}}{\frac{ن}{نُ}} = \frac{\text{دونو اکائی وقت کی نسبت}}{\text{دونو اکائی فاصلہ کی نسبت}}$$

(۱۳) ۔ حرکت غیر یکسان کے بیان مین ۔ جب ذرہ برابر وقت مین برابر فاصلہ طے نہین کرتا تو اوسکی حرکت غیر یکسان کہلاتی ہے ۔ یعنی ذرہ کی سرعت مختلف اوقات مین مختلف ہوتی ہے ۔ مگر کسی لحظہ مفروضہ مین اوسکی سرعت معلوم ہوسکتی ہے ۔ اگرچہ لحظہ مفروضہ کے ماقبل لحظہ مین سرعت مختلف ہوگی کسی لحظہ مفروضہ مین غیر یکسان سرعت کے ماپنے کا قاعدہ ذیل ہے ۔ ہم قیاس کرسکتی ہین کہ ذرہ کی حرکت بہت تہوڑے عرصہ تک یکسان ہی اور اوسکا مقدار اوس عرصہ تک ویسا ہی ہے جو اسکی شروع مین تہا

تو اب سرعت گ کو تعبیر کریگا یعنی ذرہ سرعت گ کے ساتھہ اکائی وقت مین یکسان حرکت سے اچلکر نقطہ ب تک پہونچ جائیگا - حرکت کی سمت کے تعبیر کرنیکی لئے خط اب پر تیر کے پھل کا نشان استعمال کرتی ہین -

(۱۱) - اگر ایک ذرہ سرعت گ سے چلکر وقت س مین فاصلہ ف طی کرے تو ف = گ س ثبوت جب کہتی ہین کہ ذرہ کی سرعت گ ہی تو اوس سے یہہ مراد ہوتی ہے کہ ذرہ اکائی وقت مین فاصلہ کی گ اکائین طی کرتا ہے - اسلئے س وقت مین گ × س اکائین فاصلہ طے کریگا مگر ہمنی اسی فاصلہ ف فرض کیا تھا اسواسطے ف = گ × س -

تنبیہ - حد مذکورہ بالا مین اکائی سرعت وہ حرکت ہے جسّے کہ ذرہ اکائی وقت مین یکسان چلکر اکائی فاصلہ کی سطے کرتا ہے - اوسی حد سے یہہ بھی ظاہر ہے کہ ف ∝ س کیونکہ گ غیر متبدل مانا گیا ہے - اور اسیطرح سے جب فاصلہ طی شدہ وقت حرکت سے متناسب ہو تو ہم جانینگی کہ ذرہ کی سرعت یکسان ہے

(۱۲) ایک ہی سرعت مختلف اکائی فاصلہ اور وقت کے ساتھہ ماپنی سے مختلف عددون سے تعبیر ہوتی ہے - مثلاً کوی سرعت فی سیکنڈ ۲ گز ہے یہان ایک سکنڈ اور ایک گز کو جداگانہ اکائی وقت اور اکائی فاصلہ فرض کرنی سے وہ سرعت عدد ۲ تعبیر ہوگی - اوسی حرکت کو فی سکینڈ ۶ فٹ بھی کہہ سکتی ہین اسلئے ایک سیکنڈ اور ایک فٹ کو جداگانہ اکائی وقت اور اکائی فاصلہ فرض کرنی سے وہی سرعت عدد ۶ سے تعبیر ہوگی - اسیطرح سے اوسی سرعت کو فی منٹ ۱۲۰ گز کہہ سکتی ہین پس ایک منٹ اور ایک گز کو جداگانہ

فرض اکائی کرنے سے ہوتی ہے۔ مثلا اگر اوس سرعت یکسان کو جس سے کوئی ذرہ ایک منٹ مین حرکت کرکے ایک میل فاصلہ طی کرتا ہے۔ اکائی فرض کیا جاوے۔ توجس سرعت سے وہ ذرہ ایک منٹ مین دو میل فاصلہ طی کرے۔ اوسی عدد ۲۔ سے تعبیر کرینگے۔ اور علیہذالقیاس۔ سرعت کی اکائی کوئی فرض کیجا سکتی ہے مگر حکما آسانی کے لئے ایک ایسی سرعت کو اکائی فرض کرتی ہین کہ جس سے کوئی ذرہ اکائی وقت مین اکائی فاصلہ طی کرے۔ مثلاً جب ایک فٹ۔ اور ایک سیکنڈ۔ اکائی فرض کیجاوین۔ تو اوس یکسان سرعت کو جس سے ذرہ ایک سیکنڈ مین ایک فٹ فاصلہ طے کرے سرعت کے اکائی کہینگے۔ اور اوس یکسان سرعت کو جس سے ذرہ ایک سیکنڈ مین دو فٹ فاصلہ طی کرے عدد ۲۔ سے تعبیر کرینگی اور علے ہذاالقیاس۔ اوس یکسان سرعت کو جس سے ذرہ م۔ فٹ ایک سیکنڈ مین طی کرے۔ عدد م۔ سے تعبیر کرینگے۔ گویا یہہ معلوم ہوا کہ اکائی وقت مین ذرہ کے فاصلہ طی شدہ مین جتنی اکایون کے تعداد ہو وہی عدد اوسکے سرعت کو بہی تعبیر کرتا ہے۔ مثلاً جب کہا جاوے کہ ذرہ کے سرعت۔ ۵۔ ہے۔ تو اوس سے یہہ مراد ہوتی ہے کہ وہ ذرہ ہر ایک اکائی وقت مین یکسان چلکر اکائی فاصلہ کا پانچ گنا فاصلہ طی کرتا ہے۔

(۱۰)۔ علم حرکت مین سرعت یکسان خط مستقیم سے تعبیر کیجاتی ہے۔ مثلاً فرض کرو کسی لحظہ مین ذرہ نقطہ۔ ا۔ پر ہے اور۔ اب۔ اوسکی خط تحریک ہے اور اوسکی سرعت گ ہے ب ———— ا ———— اگر ہم خط تحریک مین نقطہ ب۔ ایسا لین کہ اب۔ کے طول گ۔ سے متناسب ہو

۲۰ فٹ کے اوتنی جزو یا ضعف طی کرتا ہے - سرعت یکسان کو ہم اکثر مختصر صرف
سرعت کہینگی -

(۷) - واضح ہو کہ حرکت کے معنی ہین وقت اور فاصلہ دونو کا خیال آجاتا ہے
- ہر ایک شخص فاصلہ اور وقت کے معنی جانتا ہی فاصلہ کا ماپ کسی خاص فاصلہ کو اکائی
فرض کرکے ہوتا ہے - یعنی جب کہتی ہین کہ فاصلہ ۵ میل ہے - تو یہہ مراد
ہوتی ہے - کہ فاصلہ ایک میل کا اکائی فاصلہ ہے اور فاصلہ مذکورہ اوسکا
پانچ گُنا ہے - یعنی عدد پانچ اوس فاصلہ کو تعبیر کرتا ہے - اگر ہم بجای ایک میل
کے ایک گز کو اکائی فرض کرکے اوس فاصلہ کو ماپتے تو عدد ۸۸۰۰ اوسی
فاصلہ کو تعبیر کرتا - پس معلوم ہوا کہ جب اکائی مختلف فرض کیجائے - تو وہ
عدد بہی جو کسی خاص فاصلہ کو تعبیر کرتا ہے مختلف ہوگا - وقت کے ناپ کے
واسطی بہی اکائی کا اختلاف اسطرح سمجہنا چاہئے -

(۸) - اگرچہ اکائی کا فرض کرنا پیمایش کنندہ کی مرضی پر منحصر ہے مگر عموماً آسانی کے
لئے ہر ایک چیز کے پیمایش کے لئے خاص خاص اکائیین فرض کیجاتی ہین مثلاً چہوٹے
فاصلہ کے پیمائش کے لئے فٹ اور بڑے فاصلہ کے لئے میل اکائی فرض
کیا جاتا ہے - اسیطرح تہوڑے وقت کے لئے ایک سکینڈ - اور وقت دراز
کے لئے ایک گنہٹہ اکائی فرض کیا جاتا ہے -

(۹) - سرعت کی پیمایش - واضح ہو کہ سرعت سے مراد وقت یا فاصلہ
نہین ہے - بلکہ کسی متحرک شی کے ایک خاص حالت سے ہے جس سے
اوسکی تبدیلی مقام واقع ہوتی ہے - سرعت کے پیمایش کسی خاص سرعت کو

ایک ہی قسم کی حرکت کرتا ہے - پس ایک ذرہ کی حرکت سمجھنے سے
کل جسم کی حرکت معلوم ہوسکتی ہے -

(۴) ذرہ کی حرکت کے بیان مین مندرجہ ذیل کا ذکر ہوگا - ۱ - کسی
خاص مقام اور وقت پر اوسکی حرکت کسقدر ہے --- ۲ - وہ کس طریق مین
حرکت کرتا ہے - ۳ - کسی خاص لحظہ مین حرکت کی سمت کیا ہے - اور ذرہ
اوسوقت کس خاص مقام پر مقیم ہے - ۴ - کسی مقام سے دوسرے مقام پر پہونچنے
مین کتنا وقت درکار ہے

باب اوّل سرعت کا بیان

(۵) - کسی شئی یا ذرہ کے تبدیلی مقام کو حرکت کہتی ہین - کسی وقت معین پر
کسی ذرہ یا شے کے تبدیلی مقام کے مقدار کو اوس معیّن وقت کے سرعت کہتی ہین
- سرعت دو قسم کی ہوتی ہے - اوّل - یکسان - دویم - غیر یکسان یا متبدل

(۶) سرعت یکسان کا بیان - جب کوئی ذرہ برابر وقتون مین برابر فاصلہ
طی کرے خواہ وہ وقت کتنا قلیل یا کتنی ہی دراز فرض کیا جائے تو اوسکی
سرعت کو سرعت یکسان یا ستوی کہتی ہین - اس حالت مین ذرّہ کی حرکت
ہر ایک لحظہ مین ایک مقدار ستقیم ہوتی ہے جب حرکت اس قسم کی نہو تو
اوسکو سرعت غیر یکسان کہتی ہین - مثلاً اگر کہا جاوے کہ ذرّہ کی سرعت
۳۰ - فٹ فی منٹ ہے تو اوس سے یہہ مراد ہوتی ہے کہ ذرہ ہر ایک منٹ مین
۳۰ فٹ فاصلہ طی کرتا ہے - اور ایک منٹ کے کسی جزو یا ضعف مین بھی

علم حرکت

اصول ابتدائی

(١)— علم حرکت مین ذرہ وجسم وخط وغیرہ کے حرکت کا بیان ہوتا ہے

(٢)— علم حرکت کے دو حصہ ہین — اوّل — وہ جسمین ذرہ یا خط وغیرہ کے حرکت کا بیان ہوتا ہے یعنی جسمین شئ متحرک کے جسم کا لحاظ نہین کیا جاتا — دوم — وہ جسمین شئے متحرک کے جسم کا لحاظ کیا جاتا ہے — یعنی جسمین اوس شی کے حرکت اور اوسکے مقدار جسم کے تعلق کا ذکر ہوتا ہے

(٣)— اس رسالہ کو صرف ذرہ کے حرکت کا بیان کرکے اور ایسی امور کا ذکر کرکے کہ کسقدر طاقت کسقدر جسم پر کسقدر حرکت پیدا کرتی ہے ختم کرینگے — جسم کے ہر ایک طرحکی حرکت کا سمجہنا مشکل ہے — اور فقط ریاضی کے اعلی شاخون کے پڑہنے پر منحصر ہے — یہہ خیال نکرنا چاہیئے کہ ہمین فقط جسمونسے ہی کام پڑتا ہے — ذرون سے نہین — اور اسلئے ذرہ کے حرکت کا بیان کرنا بیفایدہ ہے — بلکہ جسم ذرون کا مجموعہ ہے — اور اگر جسم کا ہر ایک ذرہ

فہرست مضامین

الحمد للہ کہ بعون حکیم ذی المن والحکمۃ تا رسالہ مفید نسخہ فطرت با برکت

المسمّیٰ بہ

علم حرکت

جسکو

بابو شاشی بھوشن مکرجی صاحب ایم اے بی ایل پروفیسر ریاضی

گورنمنٹ کالج لاہور نے

حسب الحکم

جناب ڈاکٹر جی ڈبلیو لیٹنر صاحب بہادر ایم اے پی ایچ ڈی رجسٹرار

پنجاب یونیورسٹی کالج و پرنسپل گورنمنٹ کالج لاہور کے

برای استفادہ

امیدواران امتحان ہای پروفیشنسی کی اردو زبان میں تالیف کیا

بہ حسن اہتمام کارپردازان مطبع انجمن لاہور چھپا